

FONDO PIZZOFALCONE



NAZIONALE

BIBLIOTECA

B. Prov.
Miscellanea

B
68
427

NAPOLI

VITTORIO EM. III

BIBLIOTECA PROVINCIALE

mis-B. 68 427

Armadio

XXXV



Palchetto

Num.° d'ordine

24

18109

—X—

MÉTHODE NOUVELLE

POUR CALCULER RAPIDEMENT

LES LOGARITHMES DES NOMBRES

ET

POUR TROUVER LES NOMBRES CORRESPONDANT AUX LOGARITHMES ;

PRÉCÉDÉE

D'un Rapport fait à l'Académie des Sciences, au nom d'une Commission
composée de MM. LIOUVILLE, BINET, CAUCHY rapporteur.

PAR M. PHILIPPE KORALEK,

Ancien élève de l'École Polytechnique de Vienne en Autriche.



PARIS,

BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, ETC.,
QUAI DES AUGUSTINS, 55.

—
1851



Tout exemplaire du présent Ouvrage qui ne porterait pas, comme ci-dessous, la signature de l'Auteur, sera contrefait. Les mesures nécessaires sont prises pour atteindre, conformément à la loi, les fabricants et les débiteurs de ces exemplaires.

Philippe Leroy. Sc.

PARIS. — IMPRIMERIE DE BACHELIER,
Rue du Jardinnet, 12.

AVERTISSEMENT.

Le Rapport qui suit des illustres Académiciens sur le travail qui fait l'objet de ce livre, dispense l'auteur d'expliquer le but qu'il s'est proposé.

Des savants et des professeurs ont pris l'initiative d'une souscription destinée à publier la Méthode que nous allons exposer.

Cet honorable encouragement, digne de l'hospitalité française donnée à un étranger, mérite toute la reconnaissance de l'auteur.

Il adresse ses vifs remerciements à tous ceux qui ont aidé ses premiers travaux et qui le mettent en mesure de livrer au public un premier essai.

L'auteur possède aussi une méthode pour calculer promptement les logarithmes des fonctions circulaires, et *vice versa*, et cela sera l'objet d'un Mémoire qu'il soumettra incessamment au jugement de l'Académie des Sciences.

Il y a longtemps que l'auteur s'occupe des fonctions elliptiques, et il espère donner bientôt les résultats de ses calculs.

Les élèves pourront trouver des exemples utiles dans les dispositions des calculs qui sont contenus dans ce livre.

(4 Mai 1851.)

Rapport sur un Travail présenté à l'Académie des Sciences par M. Koralek, et relatif aux logarithmes des nombres.

Commissaires, **MM. LIOUVILLE, BINET, CAUCHY** rapporteur *.

« Dans le travail que nous avons été chargés
» d'examiner, M. Koralek s'est proposé d'indiquer
» des moyens faciles d'obtenir, avec sept chiffres,
» d'une part, le logarithme décimal d'un nombre
» donné, d'autre part, le nombre correspondant à
» un logarithme donné.

» La méthode suivie par l'auteur est fondée sur un
» ingénieux emploi de la formule qui sert à dévelop-
» per la différence entre les logarithmes de deux
» nombres en une série ordonnée suivant les puis-

* Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, tome XXXII, séance du 28 avril 1851.

» sautes du rapport qu'on obtient quand on divise
» la différence des deux nombres par leur somme.

» L'auteur observe que, dans le cas où la diffé-
» rence des deux nombres est la quatre-vingt-quin-
» zième partie du plus petit, on peut substituer à la
» différence des logarithmes le produit du module
» des Tables par le rapport dont il s'agit, puisqu'alors
» l'erreur commise est inférieure à la moitié d'un
» dix-millionième, par conséquent à la moitié d'une
» unité décimale du septième ordre. En s'appuyant
» sur cette observation, M. Koralek prouve aisément
» qu'on peut réduire la recherche du logarithme d'un
» nombre quelconque à la recherche des logarithmes
» des nombres

2, 3, 7, 11, 13;

» puis il tire de la même observation des valeurs ap-
» prochées de ces derniers logarithmes, et les légères
» corrections que ces valeurs approchées doivent
» subir, se déduisent immédiatement de la formule
» qu'il a prise pour point de départ.

» Une méthode inverse de celle qu'il a suivie dans
» la détermination des logarithmes ramène M. Ko-
» ralek de ces logarithmes aux nombres eux-mêmes.

» Les Tables de logarithmes sont depuis longtemps
» fort répandues, et leur usage habituel ne présente
» pas de difficultés sérieuses; mais les procédés suivis

» par M. Koralek peuvent être utilement employés
» par ceux qui voudraient s'exercer à trouver les lo-
» garithmes de nombres donnés, ou les nombres cor-
» respondant à des logarithmes donnés, sans avoir
» sous les yeux des Tables de logarithmes. D'ailleurs,
» le travail soumis à notre examen montre que l'au-
» teur a une grande habitude des calculs numériques,
» et les Commissaires pensent que l'Académie doit
» l'encourager à employer son talent au calcul des
» Tables des diverses transcendentes dont la détermi-
» nation peut concourir au progrès des sciences ma-
» thématiques. »

Les conclusions de ce Rapport ont été adoptées.

TABLE DES MATIÈRES.

	Pages.
Avertissement.....	III
Rapport.....	IV
PREMIÈRE PARTIE. — Problème. — Calculer avec sept chiffres décimaux exacts le logarithme d'un nombre entier de 1 à 10 000 000.	
Formule fondamentale. (Art. 1.).....	2
Formule réduite. (Art. 2.).....	2
La connaissance des logarithmes des nombres entiers de 1 à 1000 suffit pour calculer les logarithmes des nombres entiers entre 1 et 10^7 . (Art. 3.).....	3
Il n'est même nécessaire que de connaître les logarithmes des nombres entiers et compris entre 800 et 1000, et, en outre, ceux des nombres 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, $1\frac{1}{2}$, $1\frac{2}{3}$, $1\frac{1}{3}$, $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2}$. — Propriété de ces treize derniers nombres. (Art. 4.).....	3
Le calcul du logarithme d'un nombre quelconque se ramène aisément au calcul des logarithmes des cinq nombres 2, 3, 7, 11, 13. Il y a entre 800 et 1000 vingt-cinq nombres entiers qui ne contiennent que les facteurs 2, 3, 5, 7, 11, 13. (Art. 5.).....	3
Calculer le logarithme décimal de 2 avec huit figures. (Art. 7.).....	5
Remarque sur le résultat obtenu.....	6
Signification du mot mantisse.....	6
Calculer le log décimal de 3 avec huit figures. (Art. 8.).....	6
<i>id.</i> 7 <i>id.</i> (Art. 9.).....	7
<i>id.</i> 11 <i>id.</i> (Art. 10.).....	7
<i>id.</i> 13 <i>id.</i> (Art. 11.).....	8
Applications. — Calculer le log de 8347674 avec sept figures. (Art. 12.)	9
<i>id.</i> 1763585 <i>id.</i> (Art. 13.)	10
<i>id.</i> 2376854 <i>id.</i> (Art. 14.)	11
<i>id.</i> 7489368 <i>id.</i> (Art. 15.)	13
Calculer des logarithmes avec plus de sept chiffres.....	14
Problèmes. — Calculer le logarithme hyperbolique de 2 avec trente et une figures. (Art. 17.).....	15
Calculer le logarithme hyperbolique de 5 avec trente et une figures. (Art. 18.).....	18

	Pages.
Calculer M , le module des Tables, avec trente et une figures. (Art. 19.)	20
Calculer le log de 2 avec vingt-neuf figures. (Art. 20.)	22
<i>id.</i> 3 <i>id.</i> (Art. 21.)	27
<i>id.</i> 7 <i>id.</i> (Art. 22.)	31
<i>id.</i> 11 avec vingt-sept figures. (Art. 23.)	34
<i>id.</i> 13 <i>id.</i> (Art. 24.)	38
Problème. — Calculer le log de $\pi = 3,1415926536$ avec onze figures. (Art. 25.)	41
Problème. — Trouver le log de 123456789012345678901 avec vingt-quatre figures. (Art. 26.)	43
SECONDE PARTIE. — Étant donné un logarithme avec une mantisse de sept chiffres, trouver promptement le nombre correspondant avec sept chiffres sans le secours des Tables	46
Propriété des logarithmes des nombres $1\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{3}$, $1\frac{2}{3}$, 2, $2\frac{1}{2}$, 3, $3\frac{1}{2}$, 4, 5, 6, 7, 8, 9. (Art. 27.)	46
L'expression $800 + 2(1 - 903)$ sert à trouver facilement et au moins à six unités près, les trois premiers chiffres à gauche du nombre correspondant à un logarithme. (Art. 30, 31.)	47
La formule $x = \frac{2ab}{2M - b}$ sert à trouver l'autre partie du nombre correspondant. (Art. 32.)	48
Exemp. — Trouver le nombre corresp. au log $x = 6,9215655$. (Art. 33.)	48
<i>id.</i> log $x = 6,2463964$. (Art. 34.)	49
<i>id.</i> log $x = 6,3760025$. (Art. 35.)	50
<i>id.</i> 6,8744452. (Art. 36.)	52
Trouver les nombres correspondant à des logarithmes avec plus de sept chiffres	53
Remarque importante. (Art. 37.)	53
Problème. — Trouver le nombre correspondant au log $x = 0,4971498726951$ avec onze chiffres. (Art. 38.)	54
Problème. — Trouver le nombre correspondant au log $x = 20,09151$ 49772 12699 89577 37231 8 avec vingt-quatre figures. (Art. 39.)	57
Table des logarithmes de trente-sept nombres avec vingt-sept figures. (Art. 40.)	59



MÉTHODE NOUVELLE

POUR

CALCULER RAPIDEMENT LES LOGARITHMES.

PREMIÈRE PARTIE.

PROBLÈME.

Comment peut-on, en quelques minutes, calculer avec sept chiffres décimaux exacts le logarithme d'un nombre entier de 1 à 10 000 000.

Solution.

Je vais prouver que la seule connaissance du module M qui est égal à 0,43429448 suffit pour calculer promptement et facilement tous les logarithmes des nombres de 1 à 10⁷ avec sept chiffres décimaux exacts.

En effet :

1. On a

$$\log(1+y) = M \left(y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \dots \right),$$

$$\log(1-y) = M \left(-y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} - \dots \right);$$

donc

$$\log \left(\frac{1+y}{1-y} \right) = 2M \left(y + \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} + \frac{y^7}{7} + \dots \right).$$

En posant $\frac{1+y}{1-y} = 1+x$, on a

$$\log(1+x) = 2M \left[\frac{x}{2+x} + \frac{1}{3} \left(\frac{x}{2+x} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{x}{2+x} \right)^5 + \dots \right],$$

et, mettant $\frac{x}{a}$ à la place de x , il vient la formule connue :

$$\log(a+x) = \log a + 2M \left[\frac{x}{2a+x} + \frac{1}{3} \left(\frac{x}{2a+x} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{x}{2a+x} \right)^5 + \dots \right].$$

2. Si a est égal à 945 et x égal à 10, il vient

$$\frac{x}{2a+x} = \frac{10}{1900} = \frac{1}{190};$$

done

$$\left(\frac{x}{2a+x} \right)^3 = \frac{1}{190^3} = 0,000\,000\,15,$$

et

$$\frac{1}{3} \left(\frac{x}{2a+x} \right)^5 = 0,0^5 (*).$$

Ce dernier nombre, multiplié par $2M$, nombre plus petit que l'unité, ne donne pas un septième chiffre décimal. Il résulte de ce simple calcul que si la valeur de x est 95 fois plus petite que celle de a , ou encore plus petite, lorsqu'on ne veut calculer les logarithmes qu'avec sept chiffres, on peut négliger toutes les puissances de $\frac{x}{2a+x}$ supérieures à la première, et, en ce cas-là, mettre simplement

$$(1) \quad \log(a+x) = \log a + 2M \frac{x}{2a+x}.$$

3. Supposons qu'on connaisse tous les logarithmes des nombres entiers depuis 1 jusqu'à 1000; on pourra aussi

(*) 0⁵ indique que 5 est précédé de sept zéros. Nous ne répéterons plus cette observation.

trouver, au moyen de la formule (1), les logarithmes des nombres fractionnaires exprimés en décimales et compris entre 1 et 1000, et, par conséquent aussi, les logarithmes de tous les nombres entiers entre 1 et 10^7 .

4. Il n'est même nécessaire que de connaître les logarithmes des nombres entiers compris entre 800 et 1000, et, en outre, ceux des nombres 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, $1\frac{1}{4}$, $1\frac{1}{2}$, $1\frac{2}{3}$, $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2}$; car, parmi ces treize derniers nombres, il en existe toujours un qui est tel, qu'en le multipliant par le nombre dont on cherche le logarithme, les trois premiers chiffres à gauche du produit tombent entre 800 et 1000; donc, etc.

Le tableau qui suit met en évidence ce qu'on vient de dire. Si les trois premiers chiffres à gauche du nombre proposé sont entre

100 et 111, il suffit de le multiplier par 9,					
111	124,	"	"	8,	
124	142,	"	"	7,	
142	166,	"	"	6,	
166	200,	"	"	5,	
200	250,	"	"	4,	
250	285,	"	"	$3\frac{1}{3}$,	
285	333,	"	"	3,	
333	400,	"	"	$2\frac{1}{2}$,	
400	500,	"	"	2,	
500	600,	"	"	$1\frac{2}{3}$,	
600	666,	"	"	$1\frac{1}{3}$,	
666	800,	"	"	$1\frac{1}{4}$,	

5. Je dis plus, on peut calculer les logarithmes de tous les nombres entiers de 1 à 10^7 , connaissant seulement les cinq logarithmes 2, 3, 7, 11, 13; car tout a été ramené (4) à calculer les logarithmes des nombres entiers entre 800 et 1000. Or vingt-cinq de ces nombres ne contiennent que les facteurs 2, 3, 5, 7, 11, 13; donc les logarithmes de ces vingt-

cinq nombres sont connus. Ces nombres sont :

800 = $2^3 \cdot 10^3$	900 = $3^2 \cdot 10^3$
810 = $3^4 \cdot 10$	910 = $7 \cdot 10 \cdot 13$
819 = $3^2 \cdot 7 \cdot 13$	924 = $3 \cdot 2^2 \cdot 7 \cdot 11$
825 = $3 \cdot 5^2 \cdot 11$	936 = $2^3 \cdot 3^2 \cdot 13$
832 = $2^6 \cdot 13$	945 = $3^3 \cdot 5 \cdot 7$
840 = $2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$	960 = $2^5 \cdot 3 \cdot 10$
845 = $5 \cdot 13^2$	968 = $2^3 \cdot 11^2$
858 = $2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 13$	972 = $3^5 \cdot 2^3$
864 = $2^8 \cdot 3^3$	975 = $3 \cdot 5^2 \cdot 13$
875 = $5^3 \cdot 7$	980 = $2 \cdot 7^2 \cdot 10$
880 = $2^4 \cdot 10 \cdot 11$	990 = $3^2 \cdot 10 \cdot 11$
891 = $3^4 \cdot 11$	1000 = 10^3
896 = $2^7 \cdot 7$	

Quant aux nombres restants, on peut en calculer les logarithmes avec exactitude au moyen de la formule (1), car tous satisfont à la condition d'inégalité $x < \frac{a}{95}$. En effet, la plus grande différence entre deux nombres consécutifs de ces derniers est $960 - 945 = 15$, dont la moitié est 7,5; or ce cas, le plus défavorable, satisfait encore à la relation $x < \frac{a}{95}$, car on a

$$\frac{7,5}{945} = \frac{2,5}{315} = \frac{0,5}{63} = \frac{1}{126} < \frac{1}{95}.$$

6. Reste maintenant à savoir calculer les logarithmes de 2, 3, 7, 11, 13 que nous emploierons à chaque instant. Voici la marche à suivre.

Logarithme de 2.

$$7. \quad \log 1024 = \log 2^{10} = 10 \log 2 = \log 1000 + \frac{2 \text{ M. } 24}{2024},$$

faisant, dans la formule (1), $a = 1000$ et $x = 24$.

On a

$$M = 0,43429448,$$

$${}_2M = 0,86858896,$$

$${}_2M \cdot 24 = 0,86858896 \cdot 4 \cdot 6 = 3,47435584 \cdot 6 = 20,846135,$$

$${}_2M \cdot 24 : 2024 = 20,846135 : 2024 = 0,010299474 \text{ (*)}$$

$$6061$$

$$20133$$

$$19175$$

$$959$$

$$149$$

$$8$$

$$10 \log 2 = 3 + 0,010299474 = 3,01029947,$$

et, par suite,

$$\log 2 = 0,301029947.$$

Mais $\frac{24}{1000} = \frac{3}{125} = \frac{1}{41,6\dots} > \frac{1}{95}$; donc ce résultat ne

saurait être très-exact, mais il ne diffère pas pourtant de beaucoup du résultat juste; car

$$\frac{1}{3} \left(\frac{x}{2a+x} \right)^3 = \frac{1}{3} \left(\frac{24}{2024} \right)^3 = \frac{1}{3} \left(\frac{3}{253} \right)^3,$$

$$253 \cdot 253 = 64009; 64009 \cdot 253 = 253^3 = 16194277$$

$$\begin{array}{r} 759 \\ 6325 \\ \hline 61009 \end{array}$$

$$6325$$

$$61009$$

$$\begin{array}{r} 1600225 \\ 192027 \\ \hline 16194277 \end{array}$$

$$192027$$

$$16194277$$

$$27 : 16194277 = 0,01667$$

$$10806$$

$$1090 \left(\frac{24}{1111} \right)^3 = 0,01667$$

$$119$$

$$6 \frac{1}{3} \left(\frac{24}{1111} \right)^3 = 0,01556$$

donc

$$\log 2^{10} = 3,010299474 + 0,000000556 = 3,01030003,$$

(*) Nous employons toujours la division abrégée.

et, par suite,

$$\log 2 = 0,30103000;$$

un résultat qui ne diffère du précédent que de 0,075; de là suit une remarque très-importante.

Remarque. — On peut, dans un très-grand nombre de cas, prendre sans scrupule $x > \frac{a}{95}$; du reste, il est clair, comme on l'a vu dans les articles précédents, que nous ne serons pas obligé, dans la suite, de dépasser cette limite; mais comme les logarithmes des nombres 2, 3, 7, 11, 13 seront par nous incessamment employés, et qu'il nous faut, par conséquent, les logarithmes de ces nombres avec une mantisse (*) de huit chiffres, et qu'il nous est, à cet effet, nécessaire de calculer le terme $\frac{1}{3} \left(\frac{x}{2a+x} \right)^3$, calcul du reste assez simple, nous prendrons encore, dans le cas suivant, $x > \frac{a}{95}$.

Logarithme de 3.

$$8. \quad \log 3^4 = 4 \log 3 = \log 81 = \log 80 + \frac{2M}{161},$$

$$\log 80 = \log 8.10 = \log 2^3.10 = 3 \log 2 + 1 = 1,9030900,$$

$$2M : 161 = 0,868588\overline{96} : 161 = 0,00539496$$

635

1528

799

155

10

done

$$\log 3 = \frac{1}{4} (1,9030900 + 0,00539496) = \frac{1}{4} \cdot 1,90848496 \\ = 0,47712124.$$

(*) J'appelle *mantisse* (avec les géomètres allemands) la partie décimale d'un logarithme.

Les *Tables* de Callet donnent

$$\log 3 = 0,47712125;$$

la différence de notre résultat n'est que 0,00000001, et comme $\frac{1}{80} > \frac{1}{95}$, on voit, en effet, qu'on peut même dépasser cette limite (*voir* la remarque précédente). En ayant égard, du reste, au terme $\frac{1}{3} \left(\frac{x}{2a+x} \right)^3$, on trouve aisément

$$\log 3 = 0,47712125.$$

Logarithme de 7.

$$\begin{aligned} 9. \quad \log 7^4 &= 4 \log 7 = \log 2401 = \log 2400 + \frac{2M}{4801}, \\ \log 240 &= \log 10.3.2^3 = 2 + \log 3 + 3 \log 2 \\ &= 2 + 0,47712125 + 0,90309000 = 3,38021125, \\ 2M : 2401 &= 0,86859 : 4801 = 0,00018092 \\ &\quad \begin{array}{r} 38849 \\ 441 \\ 9 \end{array} \end{aligned}$$

donc

$$4 \log 7 = 3,38021125 + 0,00018092 = 3,38039217,$$

et

$$\log 7 = 0,84509804 \text{ très-exact.}$$

Logarithme de 11.

$$\begin{aligned} 10. \quad \log 100 &= 2 = \log 99 + \frac{2M}{199} = \log 11 + 2 \log 3 + \frac{2M}{199}, \\ \text{on} \quad \log 11 &= 2 - 2 \log 3 - \frac{2M}{199} = 2 - 0,95424250 - \frac{2M}{199}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{2M}{199} &= 0,868589;199 \\ &= 4,342945:995 = 0,4342945:(1000-5) = 0,00434294 \begin{array}{r|l} 500 & \\ 2171 & 473 \\ 10 & 857 \\ \hline & 44 \end{array} \\ & \qquad \qquad \qquad 0,004364771 \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \log 11 &= 2 - 0,9452425 - 0,00436477 = 2 - 0,95860727 \\ &= 1,04139273. \end{aligned}$$

Les Tables de Callet donnent

$$\log 11 = 1,04139269;$$

la différence de notre résultat n'est que 0,0'4, c'est-à-dire 0,00000004, différence qu'on trouve facilement en évaluant le terme $\frac{1}{3} \left(\frac{x}{2a+x} \right)^3$, et nous prenons

$\log 11 = 1,04139269.$

Logarithme de 13.

$$\begin{aligned} 11. \quad \log 1001 &= \log 7.11.13 = \log 7 + \log 11 + \log 13 \\ &= \log 1000 + \frac{2M}{2001} = 3 + \frac{2M}{2001}, \\ \log 13 &= 3 + \frac{2M}{2001} - \log 7 - \log 11 \\ &= 3 + \frac{2M}{2001} - 0,84509804 - 1,04139269 \\ &= 3 + \frac{2M}{2001} - 1,88649073 = 1,11350927 + \frac{2M}{2001}, \\ \frac{2M}{2001} &= 0,868589:2001 = 0,00043408 \\ & \qquad \qquad \qquad \begin{array}{r} 6818 \\ 8159 \\ 155 \\ 15 \end{array} \end{aligned}$$

donc

$$\log 13 = 1,11350927 + 0,00043408,$$

$$\log 13 = 1,11394335, \text{ très-exact.}$$

APPLICATIONS.

Calculer le logarithme de 8347674 avec sept figures.

12. En posant dans la formule

$$\log(a+x) = \log a + 2M \frac{x}{2a+x}, \quad a = 832, \quad x = 2,7674,$$

il vient

$$\log 834,7674 = \log 832 + 2M \cdot \frac{2,7674}{2.832 + 2,7674}.$$

$$\begin{aligned} \log 832 &= \log 64 \cdot 13 = 6 \log 2 + \log 13 \\ &= 6.0,30103000 + 1,11394335 \\ &= 1,80618000 + 1,11394335 = 2,92012335, \\ \log 832 &= 2,92012335. \end{aligned}$$

$$M = 0,43429448, \quad 2M = 0,86858896,$$

$$2.832 + 2,7674 = 1666,7674,$$

$$2M \cdot 2,7674 = 0,86858896 \cdot 2,7674 = 2,40373307$$

$$1,73717792$$

$$60801227$$

$$5211533$$

$$608012$$

$$34743$$

$$2,40373307$$

$$\frac{2M \cdot 2,7674}{2.832 + 2,7674} = 2,40373307 : 1666,7674 = 0,00144215$$

$$73696$$

$$7026$$

$$359$$

$$26$$

$$9$$

donc

$\log 834,7674 = 2,92012335 + 0,00144215 = 2,92156550$;
et, par suite,

$$\log 8347674 = 6,9215655.$$

Calculer le logarithme de **1763585** avec sept figures.

13. 176 est entre 166 et 200; il faut donc multiplier ce nombre par 5 (voir le tableau, page 4); il vient

$$5.1763585 = 8817925.$$

Cherchons le logarithme de ce produit.

En posant dans la formule

$$\log(a+x) = \log a + 2M \frac{x}{2a+x}, \quad a=880 \quad \text{et} \quad x=1,7925,$$

il vient

$$\log 881,7925 = \log 880 + 2M \cdot \frac{1,7925}{2.880 + 1,7925}.$$

$$\begin{aligned} \log 880 &= \log 8.11.10 = 1 + 3 \log 2 + \log 11 \\ &= 1 + 3.0,30103000 + 1,04139269 \\ &= 1 + 0,90309000 + 1,04139269 = 2,94448269, \end{aligned}$$

$$\log 880 = 2,94448269,$$

$$2M = 0,86858896, \quad 2.880 + 1,7925 = 1761,7925,$$

$$2M.1,7925 = 0,86858896.1,7925 = 1,55694570$$

$$\begin{array}{r} 1,7925 \\ 0,86858896 \\ \hline 60801227 \\ 7817300 \\ 173718 \\ 43429 \\ \hline 1,55694570 \end{array}$$

$$\frac{2 \text{ M. } 1,7925}{2.880 + 1,7925} = 1,5569457 : 1761,7925 = 0,00088373$$

$$\begin{array}{r} 147512 \\ 6569 \\ 1284 \\ 51 \end{array}$$

donc

$$\log 881,7925 = 2,94448269 + 0,00088373 = 2,94536642,$$

et, par suite,

$$\log 8817925 = 6,94536642;$$

done

$$\begin{aligned} \log \frac{8817925}{5} &= \log 8817925 - \log 5 \\ &= \log 1763585 = 6,94536642 - 0,69897000 \\ &= 6,24639642, \end{aligned}$$

$\log 1763585 = 6,2463964.$

Calculer le logarithme de **2376854** avec sept figures.

14. 237 tombe entre 200 et 250; nous multiplions donc ce nombre par 4 (*voir* le tableau, page 3), et il vient

$$4.2376854 = 9507416,$$

et c'est de ce quadruple du nombre donné que nous cherchons le logarithme

En posant dans la formule

$$\log(a+x) = \log a + 2 \text{ M. } \frac{x}{2a+x}, \quad a = 945 \text{ et } x = 5,7416,$$

il vient

$$\log 950,7416 = \log 945 + 2 \text{ M. } \frac{5,7416}{2.945 + 5,7416}.$$

$$\begin{aligned}\log 945 &= \log 5 \cdot 3^3 \cdot 7 = \log 5 + 3 \log 3 + \log 7 \\ &= 0,69897000 + 3 \cdot 0,47712125 + 0,84509804 \\ &= 0,69897000 + 1,43136375 + 0,84509804 = 2,97543179,\end{aligned}$$

$$\log 945 = 2,97543179,$$

$$2M = 0,86858896, \quad 2 \cdot 945 + 5,7416 = 1895,7416,$$

$$2M \cdot 5,7416 = 0,86858896 \cdot 5,7416 = 4,98709037$$

$$\begin{array}{r} 5,7416 \\ 4,34294480 \\ 60801227 \\ 3474356 \\ 86859 \\ 52115 \\ \hline 4,98709037 \end{array}$$

$$\frac{2M \cdot 5,7416}{2 \cdot 945 + 5,7416} = \frac{4,98709037}{1895,7416} = 0,00263068$$

$$\begin{array}{r} 1195607 \\ 58162 \\ 1290 \\ 153 \end{array}$$

donc

$$\log 950,7146 = 2,97543179 + 0,00263068 = 2,97806247,$$

et, par suite,

$$\log 9507146 = 6,97806247;$$

mais

$$\log 4 = 0,60206000,$$

donc

$$\begin{aligned}\log 9507146 &= \log 2376854 = \log 9507146 - \log 4 \\ &= 6,97806247 - 0,60206000 = 6,37600247\end{aligned}$$

$\log 2376854 = 6,3760025.$

Calculer le logarithme de 7489368 avec sept figures.

15. 748 tombe entre 800 et 1000; nous multiplions donc ce nombre par $1 \frac{1}{4}$, et il vient

$$(1 + \frac{1}{4}) \cdot 7489368 = 9361710,$$

et c'est de ce produit que nous cherchons le logarithme.

En posant, dans la formule

$$\log(a + x) = \log a + 2 M \frac{x}{2a + x},$$

$$a = 936, \quad x = 0,171,$$

il vient

$$\log 936,171 = \log 936 + 2 M \frac{0,171}{2 \cdot 936 + 0,171}.$$

$$\begin{aligned} \log 936 &= \log 8 \cdot 9 \cdot 13 = 3 \log 2 + 2 \log 3 + \log 13 \\ &= 3 \cdot 0,30103000 + 2 \cdot 0,47712125 + 1,11394335 \\ &= 0,90309000 + 0,95424250 + 1,11394335 = 2,97127585 \end{aligned}$$

$$\log 936 = 2,97127585$$

$$2 M = 0,86858896,$$

$$2 M \cdot 0,171 = 0,86858896 \cdot 0,171 = 0,14852871$$

$$\begin{array}{r} 60801227 \\ 868589 \end{array}$$

$$\hline 0,148528712$$

$$2 \cdot 936 + 0,171 = 1872,171,$$

$$\frac{2 M \cdot 0,171}{2 \cdot 936 + 0,171} = 0,14852871 : 1872,171 = 0,00007933$$

$$\begin{array}{r} 17475 \\ 626 \\ 64 \end{array}$$

$$\hline$$

$$64$$

donc

$$\log 936,171 = 2,97127585 + 0,00007933 = 2,97135518,$$

et, par suite,

$$\log 9361710 = 6,97135518;$$

mais

$$\log(1 + \frac{1}{4}) = \log \frac{5}{4} = \log 5 - \log 4 = 0,69897000 - 0,60206 \\ = 0,09691000;$$

donc

$$\log \frac{9361710}{(1 + \frac{1}{4})} = \log 7489368 = \log 9361710 - \log \frac{5}{4} \\ = 6,97135518 - 0,09691000 \\ = 6,87444518$$

$\log 7489368 = 6,8744452.$

Calcul des logarithmes avec plus de sept chiffres.

Ces applications suffisent pour montrer que l'on peut, en effet, calculer, en moins de cinq minutes, un logarithme avec une mantisse de sept chiffres, ayant sous les yeux les logarithmes des cinq nombres 2, 3, 7, 11, 13; et les deux tableaux (pages 3 et 4) dont, avec un peu d'habitude, on peut même se passer. Ce qui suit a pour objet les opérations qui exigent plus de sept chiffres.

16. Si l'on connaît les logarithmes des nombres 2, 3, 7, 11 et 13 avec onze, douze et treize figures, etc., on peut calculer les logarithmes des nombres entiers de 1 à 10^9 , 1 à 10^{10} , 1 à 10^{11} , etc., avec neuf, dix, onze figures, etc., en calculant le terme $\frac{2M}{3} \left(\frac{x}{2a+x} \right)^3$, et, au besoin, $\frac{2M}{5} \left(\frac{x}{2a+x} \right)^5$, etc.

Pour mettre ceci en évidence, nous nous proposons de calculer le logarithme de π ,

$$3,1415926536$$

avec onze figures, et celui du nombre

123456789012345678901

avec vingt-quatre figures; mais pour que nous soyons tout à fait à même de résoudre ces deux problèmes, nous calculerons d'abord les logarithmes de 2, 3 et 7 avec vingt-neuf figures, et ceux des nombres 11 et 13 avec vingt-sept figures. Pour résoudre ces cinq derniers problèmes, il nous faut la connaissance de M avec vingt-neuf chiffres décimaux, et c'est pourquoi nous calculerons M avec trente et un chiffres. Mais comme M est égal à la valeur réciproque du logarithme hyperbolique de 10, et $\log 10 = \log 2 + \log 5$, nous calculerons avant tout le log naturel 2 et log nat 5 avec trente et une figures, et nous atteindrons notre but d'une manière plus parfaite.

PROBLÈME.

Calculer le logarithme hyperbolique de 2 avec trente et une figures.

$$17. \quad \log \text{nat} (a+x) = \log \text{nat} a + 2 \left[\frac{x}{2a+x} + \frac{1}{3} \left(\frac{x}{2a+x} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{x}{2a+x} \right)^5 + \dots \right].$$

En posant $a = 1$, $x = 1$, il vient

$$\begin{aligned} \log \text{nat} 2 &= 2 \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{2} \right)^5 + \frac{1}{7} \left(\frac{1}{2} \right)^7 + \dots \right] \\ &= 2.S. \end{aligned}$$

Nous donnons à la page suivante les valeurs en décimales des puissances impaires de $\left(\frac{1}{2}\right)$ à l'effet de calculer les termes de S.

0,33333	33333	33333	33333	33333	33333	333	=	$(\frac{1}{3})^8$
0,03703	70370	37037	03703	70370	37037	037	=	$(\frac{1}{3})^9$
411	52263	37448	55967	07818	93004	115	=	$(\frac{1}{3})^{10}$
45	72473	70827	61774	11979	88111	568	=	$(\frac{1}{3})^{11}$
5	08052	63425	29086	01331	09790	174	=	$(\frac{1}{3})^{12}$
	56450	29269	47676	22370	12198	908	=	$(\frac{1}{3})^{13}$
	6272	25474	38630	69152	23577	656	=	$(\frac{1}{3})^{14}$
	696	91719	37625	63239	13730	851	=	$(\frac{1}{3})^{15}$
	77	43524	37513	95915	45970	095	=	$(\frac{1}{3})^{16}$
	8	60391	59723	77323	93996	677	=	$(\frac{1}{3})^{17}$
		95599	06635	97480	43777	409	=	$(\frac{1}{3})^{18}$
		10622	11848	44164	49308	601	=	$(\frac{1}{3})^{19}$
		1180	23538	71573	83256	511	=	$(\frac{1}{3})^{20}$
		131	13726	52397	09250	723	=	$(\frac{1}{3})^{21}$
		14	57080	72488	56583	414	=	$(\frac{1}{3})^{22}$
		1	61897	85832	06287	046	=	$(\frac{1}{3})^{23}$
			17988	65092	45143	005	=	$(\frac{1}{3})^{24}$
			1998	73899	16127	001	=	$(\frac{1}{3})^{25}$
			222	08211	01791	889	=	$(\frac{1}{3})^{26}$
			24	67579	00199	099	=	$(\frac{1}{3})^{27}$
			2	74175	44466	567	=	$(\frac{1}{3})^{28}$
				30463	93829	619	=	$(\frac{1}{3})^{29}$
				3384	88203	291	=	$(\frac{1}{3})^{30}$
				376	09800	366	=	$(\frac{1}{3})^{31}$
				41	78866	707	=	$(\frac{1}{3})^{32}$
				4	64318	523	=	$(\frac{1}{3})^{33}$
					51590	947	=	$(\frac{1}{3})^{34}$
					5732	327	=	$(\frac{1}{3})^{35}$
					636	925	=	$(\frac{1}{3})^{36}$
					70	769	=	$(\frac{1}{3})^{37}$
					7	863	=	$(\frac{1}{3})^{38}$
						874	=	$(\frac{1}{3})^{39}$
						97	=	$(\frac{1}{3})^{40}$
						11	=	$(\frac{1}{3})^{41}$
						1	=	$(\frac{1}{3})^{42}$

0,03333	33333	33333	33333	33333	33333	333	=	$\frac{1}{3}$
1234	56790	12345	67901	23456	79012	345	=	$\frac{1}{3} \cdot (\frac{1}{3})^0$
82	30452	67489	71193	41563	78600	823	=	$\frac{1}{3} \cdot (\frac{1}{3})^1$
6	53210	52975	37396	30282	84015	938	=	$\frac{1}{3} \cdot (\frac{1}{3})^2$
	56450	29269	47676	22370	12198	908	=	$\frac{1}{3} \cdot (\frac{1}{3})^3$
	5131	84479	04334	20215	46563	537	=	
	842	48113	41433	13011	71044	435	=	etc.
	46	46114	62508	37549	27582	057		
	4	55501	43383	17406	79174	712		
		45283	76827	56701	25999	825		
		4552	33649	33213	35417	972		
		461	83123	84528	89100	374		
		47	20941	54862	95330	260		
		4	85693	57496	18861	138		
			50244	16292	70916	669		
			5222	51155	87299	582		
			545	11063	40761	909		
			57	10682	83317	914		
			6	00221	91940	321		
				63271	25646	131		
				6687	20596	746		
				708	46368	131		
				75	21960	073		
				8	00208	518		
					85282	994		
					9104	285		
					973	414		
					104	224		
					11	174		
					1	199		
						129		
						14		
						1		

0,34657 35902 79972 65470 86160 60729 085 = 8
0,69314 71805 59945 30941 72321 21458 170 = 28

donc

$\log \text{nat } 2 = 0,69314 \ 71805 \ 59945 \ 30941 \ 72321 \ 21458 \ 2.$

PROBLÈME.

Calculer le logarithme hyperbolique de 5.

$$18. \quad \log \text{nat } (a + x) = \log \text{nat } a \\ + 2 \left[\frac{x}{2a + x} + \frac{1}{3} \left(\frac{x}{2a + x} \right)^3 + \dots \right].$$

En posant $a = 4$ et $x = 1$, il vient

$$\begin{aligned} \log \text{nat } 5 &= \log \text{nat } 4 + 2 \left[\frac{1}{9} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{9} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{9} \right)^5 + \dots \right] \\ &= 2 \log \text{nat } 2 + 2s \\ &= 2 (\log \text{nat } 2 + s). \end{aligned}$$

Nous donnons à la page suivante les valeurs en décimales des puissances de $\left(\frac{1}{9}\right)$, à l'effet de calculer les termes de s .

0, 11111	11111	11111	11111	11111	11111	11111	111... $(\frac{1}{9})$
1234	56790	12345	67901	23456	79012	345... $(\frac{1}{9})^2$	
137	17421	12482	85322	35939	64334	705... $(\frac{1}{9})^3$	
15	24157	90275	87258	03993	29370	523...	
1	69350	87808	43028	67110	36596	725... $(\frac{1}{9})^4$	
18816	76423	15892	07456	70732	969...		
2090	75158	12876	89717	41192	552... $(\frac{1}{9})^7$		
232	30573	12541	87746	37910	284...		
25	81174	79171	31971	81990	031... $(\frac{1}{9})^9$		
2	86797	19907	92441	31332	226...		
31866	35545	32493	47925	803... $(\frac{1}{9})^{11}$			
3540	70616	14721	49769	534...			
393	41179	57191	27752	170... $(\frac{1}{9})^{12}$			
43	71242	17465	69750	241...			
4	85693	57496	18861	138... $(\frac{1}{9})^{13}$			
53965	95277	35429	015...				
5996	21697	48381	002... $(\frac{1}{9})^{14}$				
666	24633	05375	667...				
74	02737	00597	296... $(\frac{1}{9})^{15}$				
8	22526	33399	700...				
91391	81488	856... $(\frac{1}{9})^{16}$					
10154	64609	873...					
1128	29401	097... $(\frac{1}{9})^{20}$					
125	36600	122...					
13	92955	569... $(\frac{1}{9})^{25}$					
1	54772	841...					
17196	982... $(\frac{1}{9})^{27}$						
1910	776...						
212	308... $(\frac{1}{9})^{29}$						
23	590...						
2	621... $(\frac{1}{9})^{31}$						
291...							
32...	$(\frac{1}{9})^{33}$						

0,1111	1111	1111	1111	1111	1111	1111	111...	$(\frac{1}{9})$
45	72473	70827	61774	11979	88111	568...	$\frac{1}{9}$	$(\frac{1}{9})^2$
	33870	17561	68605	73422	07319	345...	$\frac{1}{9}$	$(\frac{1}{9})^3$
	298	67879	73268	12816	77313	222...	$\frac{1}{9}$	$(\frac{1}{9})^4$
	2	86797	19907	92441	31332	226 etc.		
		2896	94104	48408	49811	437		
		30	26244	58245	48288	628		
			32379	57166	41257	409		
			352	71864	55787	118		
			3	89617	73715	647		
				4351	99118	517		
				49	05626	135		
					55718	223		
					636	925		
					7	321		
						84		
						1		

$$\begin{aligned}
 0,11157 \ 17756 \ 57104 \ 87788 \ 31475 \ 45154 \ 917 &= S \\
 0,69314 \ 71805 \ 59945 \ 30941 \ 72321 \ 21458 \ 170 &= \log n. 2 \\
 0,80471 \ 89562 \ 17050 \ 18730 \ 03796 \ 66613 \ 087 &= S + \log n. 2 \\
 1,60943 \ 79124 \ 34100 \ 37460 \ 07593 \ 33226 \ 174 &= 2(\log n. 2 + s)
 \end{aligned}$$

done

$\log n. 5 = 1,60943 \ 79124 \ 34100 \ 37460 \ 07593 \ 33226 \ 2.$

PROBLÈME.

Calculer M avec trente et une figures.

$$19. \quad M = \frac{1}{\log n. 10} = \frac{1}{\log n. 2 + \log n. 5},$$

$$\log n. 2 = 0,69314 \ 71805 \ 59945 \ 30941 \ 72321 \ 21458 \ 2$$

$$\log n. 5 = 1,60943 \ 79124 \ 34100 \ 37460 \ 07593 \ 33226 \ 2$$

$$\log n. 10 = 2,30258 \ 50929 \ 94045 \ 68401 \ 79914 \ 54684 \ 4$$

1;2,30258 50929 94045 68401 79914 54684 4 = M.

0,07896 59628 02381 72639 28034 18126 24
 988 84100 12560 35587 22636 74485 71
 67 80696 40584 17313 61917 08666 97
 21 75526 21985 36339 93881 10376 03
 1 03199 63615 89988 78264 91145 11
 11096 23243 92370 50904 19179 29
 1885 89206 72608 68168 11982 71
 43 82399 28656 31620 90543 40
 20 79814 19356 91164 06525 41
 7487 60987 44752 90909 22
 579 85459 54931 53857 17
 119 33757 68943 44720 37
 4 20832 22446 42436 17
 1 90573 71516 48390 49
 6366 90772 53153 94
 1761 73753 93273 03
 149 92797 42314 71
 11 77286 86518 29
 25994 31868 59
 2968 46775 60
 665 88266 30
 205 36564 44
 21 15883 70
 43557 12
 20531 27
 2110 59
 38 27
 15 24
 1 43
 5

M = 0,43429 44819 03251 82765 11289 18916 6

PROBLÈME.

Calculer le logarithme de 2 avec vingt-neuf figures.

$$20. \quad \log(a+x)$$

$$= \log a + 2M \left[\frac{x}{2a+x} + \frac{1}{3} \left(\frac{x}{2a+x} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{x}{2a+x} \right)^5 + \dots \right]$$

$$= \log a + 2M \left(t_1 + \frac{1}{3} t_3 + \frac{1}{5} t_5 + \frac{1}{7} t_7 + \frac{1}{9} t_9 + \dots \right) = \log a + 2Mp.$$

$$t_1 = \frac{x}{2a+x}, \quad t_3 = t_1 \cdot \frac{x^2}{(2a+x)^2}, \quad t_5 = t_3 \cdot \frac{x^2}{(2a+x)^2}, \quad t_7 = t_5 \cdot \frac{x^2}{(2a+x)^2}, \dots$$

$$\log 1024 = \log 2^{10} = 10 \log 2$$

$$= \log 1000 + 2M \cdot \left[\frac{24}{1024} + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{24}{1024} \right)^3 + \dots \right]$$

$$= 3 + 2M \left(\frac{3}{253} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3^3}{253^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{3^5}{253^5} + \dots \right).$$

$$t_1 = \frac{x}{2a+x} = \frac{3}{253}$$

$$= 3:253 = 0,01185770750988142292490118577$$

300

470

2170

1460

1950

1790

1900

1290

2500

2230

2060

360

1070

580

740

2340

630

1240

280

300

$$\frac{x^2}{(2a+x)^2} = \frac{3^2}{253^2} = \frac{9}{64009},$$

$$t_2 = t_1 \cdot \frac{3^2}{253^2}$$

$$= 0,01185770750988142292490118577 \cdot \frac{9}{64009}$$

$$= 0,10671936758893280632411067193:64009 = q$$

$$427103$$

$$q = 0,0166725566074978216069788$$

$$430496$$

$$464427$$

$$163645$$

$$356278$$

$$362338$$

$$422939$$

$$388853$$

$$479928$$

$$318650$$

$$626146$$

$$500653$$

$$525902$$

$$138304$$

$$102861$$

$$388521$$

$$446707$$

$$62653$$

$$5045$$

$$565$$

$$53$$

$$t_2 = 0,0166725566074978216069788,$$

$$\frac{1}{2} t_2 = 0,055575188691659405356596,$$

$$t_1 = 0,0^{\circ}166725566074978216069788 \cdot \frac{1}{611111}$$

$$= 0,0^{\circ}150053009467480394463:64009 = q$$

$$\begin{array}{r} 220350 \\ 283230 \end{array} \quad q = 0,0^{\circ}23442486129681825128$$

$$271949$$

$$159134$$

$$311166$$

$$551307$$

$$392354$$

$$83008$$

$$189990$$

$$619723$$

$$436429$$

$$523754$$

$$116824$$

$$528156$$

$$160843$$

$$32825$$

$$820$$

$$180$$

$$52$$

$$t_1 = 0,0^{\circ}23442486129681825128,$$

$$\frac{1}{3} t_1 = 0,0^{\circ}4688497225936365026.$$

$$t_1 = t_1 \cdot \frac{3^2}{253^2} = 0,0^{\circ}23442486129681825128 \cdot \frac{1}{111111}$$

$$= 0,0^{\circ}21098237516713643:64009 = q$$

$$\begin{array}{r} 189553 \\ 615357 \end{array} \quad q = 0,0^{\circ}3296136092848450$$

$$392765$$

$$87111$$

$$231026$$

$$389997$$

$$594313$$

$$182326$$

$$543084$$

$$310123$$

$$54087$$

$$2880$$

$$320$$

$$t_1 = 0,0^{\circ}3296136092848450, \quad \frac{1}{3} t_1 = 0,0^{\circ}470876584692636.$$

$$\begin{aligned}
 t_2 &= t_1 \cdot \frac{3^1}{353} = 0,0^{12}3296136092848450 \cdot \frac{1}{34444} \\
 &= 0,0^{12}2966522483564 : 64009 = q \\
 &\quad 406162 \qquad q = 0,0^{11}463453964843 \\
 &\quad 221084 \\
 &\quad 290578 \\
 &\quad 345423 \\
 &\quad 253785 \\
 &\quad 617586 \\
 &\quad 415054 \\
 &\quad 31000 \\
 &\quad 5396 \\
 &\quad 276 \\
 &\quad 20
 \end{aligned}$$

$$t_2 = 0,0^{11}463453964843, \quad \frac{1}{2} t_2 = 0,0^{10}51494884983.$$

$$\begin{aligned}
 t_{11} &= t_2 \cdot \frac{3^1}{253^1} = 0,0^{11}463453964843 \cdot \frac{1}{24444} \\
 &= 0,0^{10}417108568 : 64009 = 0,0^{11}65164050 \\
 &\quad 330545 \\
 &\quad 105006 \\
 &\quad 409978 \\
 &\quad 25924 \\
 &\quad 320
 \end{aligned}$$

$$t_{11} = 0,0^{11}65164050, \quad \frac{1}{11} t_{11} = 1,0^{11}5924005.$$

$$\begin{aligned}
 t_{12} &= t_{11} \cdot \frac{3^1}{253^1} = 0,0^{11}65164050 \cdot \frac{1}{24444} \\
 &= 0,0^{10}58648 : 64009 = 0,0^{11}9162 \\
 &\quad 1040 \\
 &\quad 400 \\
 &\quad 16
 \end{aligned}$$

$$t_{12} = 0,0^{10}9162, \quad \frac{1}{12} t_{12} = 0,0^{10}705.$$

$$\begin{array}{rcl}
 0,01185 & 77075 & 09881 \quad 42292 \quad 49011 \quad 8577 = t_1 \\
 & 5557 & 51886 \quad 91659 \quad 40535 \quad 6596 = \frac{1}{2} t_2 \\
 & & 46884 \quad 97225 \quad 93636 \quad 5026 = \frac{1}{3} t_3 \\
 & & & 4 \quad 70876 \quad 58469 \quad 2636 = \frac{1}{4} t_4 \\
 & & & & 51 \quad 49488 \quad 4983 = \frac{1}{5} t_5 \\
 & & & & & 592 \quad 4005 = \frac{1}{11} t_{11} \\
 & & & & & & 705 = \frac{1}{13} t_{13}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 0,01185 & 82633 & 08658 \quad 02105 \quad 91734 \quad 2528 = p \\
 0,86858 & 89638 & 06503 \quad 65530 \quad 22578 \quad 3783 = 2M
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 0,00948 & 69106 & 46926 \quad 41684 \quad 73387 \quad 4022 \\
 & 71 & 14957 \quad 98519 \quad 48126 \quad 35504 \quad 0551 \\
 & 9 & 48661 \quad 06469 \quad 26416 \quad 84733 \quad 8740 \\
 & & 59291 \quad 31654 \quad 32901 \quad 05295 \quad 8671 \\
 & & 9486 \quad 61064 \quad 69264 \quad 16847 \quad 3387 \\
 & & 948 \quad 66106 \quad 46926 \quad 41684 \quad 7339 \\
 & & 106 \quad 72436 \quad 97779 \quad 22189 \quad 5326 \\
 & & 7 & 11495 \quad 79851 \quad 94812 \quad 6355 \\
 & & & 35574 \quad 78992 \quad 59740 \quad 6318 \\
 & & & 9486 \quad 61064 \quad 69264 \quad 1685 \\
 & & & 71 & 14957 \quad 98519 \quad 4813 \\
 & & & 5 & 92913 \quad 16543 \quad 2901 \\
 & & & & 3557 \quad 47899 \quad 2597 \\
 & & & & 711 \quad 49579 \quad 8519 \\
 & & & & 59 \quad 29131 \quad 6543 \\
 & & & & 5 & 92913 \quad 1654 \\
 & & & & & 35574 \quad 7899 \\
 & & & & & 237 \quad 1653 \\
 & & & & & 23 \quad 7165 \\
 & & & & & 5 \quad 9291 \\
 & & & & & 8301 \\
 & & & & & 949 \\
 & & & & & 35 \\
 & & & & & 8
 \end{array}$$

$$0,01029 \quad 99566 \quad 39811 \quad 95213 \quad 73889 \quad 4723 = 2Mp.$$

$$10 \log 2 = 3,01029 \quad 99566 \quad 39811 \quad 95213 \quad 73889 \quad 4723,$$

done

$$\log 2 = 0,30102\ 99956\ 63981\ 19521\ 37388\ 9472.$$

PROBLÈME.

Calculer le logarithme de 3 avec vingt-neuf figures.

$$21. \quad \log 3^4 = 4 \log 3 = \log 81$$

$$= \log 80 + 2M \left(\frac{1}{161} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{161^2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{161^3} + \dots \right)$$

$$= 1 + 3 \log 2 + 2M(t_1 + \frac{1}{3}t_2 + \frac{1}{5}t_3 + \frac{1}{7}t_4 + \dots)$$

$$= 1 + 3 \log 2 + 2Mp.$$

$$1 + 3 \log 2 = 1 + 3.(0,30102\ 99956\ 63981\ 19521\ 37388\ 94723) \\ = 1,90308\ 99869\ 91943\ 58564\ 12166\ 84169.$$

$$t_1 = 1:161 = 0,00621118012422360248447204969$$

1000

340

180

190

290

1290

200

390

680

360

380

580

970

400

780

1360

720

760

1160

330

800

1560

111

14

$$\begin{aligned}
 t_1 &= t_1 : 161^2 = t_1 : 25921 \\
 &= 0,0062111801242236024844720 : 25921 = q \\
 &\quad \begin{array}{r} 102698 \\ 249350 \\ 160611 \\ 50852 \\ 249314 \\ 160252 \\ 47262 \\ 213413 \\ 60456 \\ 86140 \\ 83772 \\ 60094 \\ 82528 \\ 47654 \\ 217334 \\ 99667 \\ 219042 \\ 116740 \\ 13056 \\ 96 \\ 18 \end{array} \quad q = 0,0^{\circ}23961823323183845037
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 t_2 &= 0,0^{\circ}23961961823323183845037, \\
 \frac{1}{2} t_2 &= 0,0^{\circ}7987320607774394615012.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 t_3 &= t_3 : 25921 \\
 &= 0,0^{\circ}2396196182332318385:25921 = q \\
 &\quad \begin{array}{r} 63306 \\ 114641 \\ 109578 \\ 58942 \\ 71003 \\ 191613 \\ 101662 \\ 238993 \\ 57041 \\ 51998 \\ 156385 \\ 859 \\ 81 \\ 3 \end{array} \quad q = 0,0''924422739220060331
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 t_3 &= 0,0''924422739220060331, \\
 \frac{1}{2} t_3 &= 0,0''184884547844012066.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 t_1 &= t_1 : 25921 \\
 &= 0,0^{11}92442273922006:25921 = 0,0^{13}35663081641143 \\
 &\quad 146792 \\
 &\quad 171877 \\
 &\quad 163513 \\
 &\quad 79879 \\
 &\quad 211622 \\
 &\quad 42540 \\
 &\quad 166190 \\
 &\quad 106646 \\
 &\quad 2962 \\
 &\quad 370 \\
 &\quad 111 \\
 &\quad 7
 \end{aligned}$$

$$t_1 = 0,0^{13}35663081641143, \quad \frac{1}{7} t_1 = 0,0^{15}5094725948735.$$

$$\begin{aligned}
 t_1 &= t_1 : 25921 \\
 &= 0,0^{13}3566308164:25921 = 0,0^{15}1375837415 \\
 &\quad 97420 \\
 &\quad 196578 \\
 &\quad 151311 \\
 &\quad 217066 \\
 &\quad 96984 \\
 &\quad 19221 \\
 &\quad 1076 \\
 &\quad 39 \\
 &\quad 13
 \end{aligned}$$

$$t_1 = 0,0^{15}1375837415, \quad \frac{1}{7} t_1 = 0,0^{21}152870824.$$

$$\begin{aligned}
 t_{11} &= t_1 : 25921 = 0,0^{15}137583\overline{7415} : 25921 = 0,0^{21}53079 \\
 &\quad 7979 \\
 &\quad 203 \\
 &\quad 2
 \end{aligned}$$

$$t_{11} = 0,0^{21}53079, \quad \frac{1}{11} t_{11} = 0,0^{25}4825.$$

$$t_{13} = t_{11} : 25921 = 0,0^{21}53079 : 25921 = 0,0^{29}2,$$

$$t_{13} = 0,0^{29}2, \quad \frac{1}{13} t_{13} = 0,0^{29}$$

$$\begin{array}{rcl}
 0,00621 & 11801 & 24223 \ 60248 \ 44720 \ 4969 = t_1 \\
 & 798 & 73206 \ 07774 \ 39461 \ 5012 = \frac{1}{2} t_1 \\
 & & 1848 \ 84547 \ 84401 \ 2066 = \frac{1}{2} t_1 \\
 & & & 5094 \ 72594 \ 8735 = \frac{1}{2} t_1 \\
 & & & & 15287 \ 0824 = \frac{1}{2} t_1 \\
 & & & & & 4825 = \frac{1}{11} t_1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 0,00621 & 12599 & 99278 \ 57665 \ 56465 \ 6431 = p \\
 0,86858 & 89638 & 06503 \ 65530 \ 22578 \ 3783 = 2M
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 0,00496 & 90479 & 99422 \ 86132 \ 45172 \ 5145 \\
 & 37 & 26755 \ 99956 \ 71459 \ 93387 \ 9386 \\
 & 4 & 96900 \ 79994 \ 22861 \ 32451 \ 7251 \\
 & & 31056 \ 29999 \ 63928 \ 83278 \ 2328 \\
 & & 4969 \ 00799 \ 94228 \ 61324 \ 5173 \\
 & & 496 \ 90079 \ 99422 \ 86132 \ 4517 \\
 & & 55 \ 90133 \ 99935 \ 07189 \ 9008 \\
 & & 3 \ 72675 \ 59995 \ 67145 \ 9934 \\
 & & & 18633 \ 77999 \ 78357 \ 2997 \\
 & & & 4969 \ 00799 \ 94228 \ 6132 \\
 & & & 37 \ 26755 \ 99956 \ 7146 \\
 & & & 3 \ 10562 \ 99996 \ 3929 \\
 & & & & 1863 \ 37799 \ 9783 \\
 & & & & 372 \ 67559 \ 9956 \\
 & & & & 31 \ 05629 \ 9996 \\
 & & & & 3 \ 10563 \ 0000 \\
 & & & & & 18633 \ 7800 \\
 & & & & & 124 \ 2252 \\
 & & & & & 12 \ 4225 \\
 & & & & & 3 \ 1056 \\
 & & & & & & 4348 \\
 & & & & & & 497 \\
 & & & & & & 19 \\
 & & & & & & 5
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 0,00539 & 50318 & 86706 \ 16353 \ 88949 \ 2883 = 2Mp \\
 1,90308 & 99869 & 91943 \ 58564 \ 12166 \ 8417 = 1+3\log 2 = \log 80 \\
 1,90848 & 50188 & 78649 \ 74918 \ 01116 \ 1300 = 4 \log 3 \\
 0,47712 & 12547 & 19662 \ 43729 \ 50279 \ 0325 = \log 3
 \end{array}$$

$\log 3 = 0,47712 \ 12547 \ 19662 \ 43729 \ 50279 \ 0325.$
--

PROBLÈME.

Calculer le logarithme de 7 avec vingt-neuf figures.

$$\begin{aligned} 22. \quad \log 7' &= 4 \log 7 = \log 2401 \\ &= \log 2400 + 2M \left[\frac{1}{1111} + \frac{1}{1} \cdot \left(\frac{1}{1111} \right)^2 + \frac{1}{1} \cdot \left(\frac{1}{1111} \right)^3 + \dots \right] \\ &= \log 2400 + 2Mp. \end{aligned}$$

$$\log 2400 = \log 100 \cdot 2^3 \cdot 3 = 2 + 3 \log 2 + \log 3.$$

$$\log 2 = 0,30102 \ 99956 \ 63981 \ 19521 \ 37388 \ 94723$$

$$3 \log 2 = 0,90308 \ 99869 \ 91943 \ 58564 \ 12166 \ 8417$$

$$\begin{array}{r} 2 + \log 3 = 2,47712 \ 12547 \ 19662 \ 43729 \ 50279 \ 0325 \\ \hline 3,38021 \ 12417 \ 11606 \ 02293 \ 62445 \ 8742 = \log 2400 \end{array}$$

$$t_1 = 1 : 4801 = 0,00020 \ 82899 \ 39595 \ 91751 \ 71839 \ 2001$$

$$10000$$

$$39800$$

$$13920$$

$$43180$$

$$47720$$

$$45110$$

$$19010$$

$$46070$$

$$28610$$

$$46050$$

$$28410$$

$$44050$$

$$8410$$

$$36090$$

$$24830$$

$$8250$$

$$34490$$

$$8830$$

$$40290$$

$$18820$$

$$44170$$

$$9610$$

$$81$$

$$4801^2 = 23049601$$

$$\begin{aligned}
 t_3 &= t_1 : 4801^2 \\
 &= 0,00020828993959591751718392001 : 23\overline{049601} = q \\
 &\quad 84353059 \quad q = 0,0''9036 \ 59632 \ 09479 \ 2085 \\
 &\quad 152042565 \\
 &\quad 137449599 \\
 &\quad 222015941 \\
 &\quad 145695327 \\
 &\quad 73977215 \\
 &\quad 48284121 \\
 &\quad 218491972 \\
 &\quad 11045563 \\
 &\quad 1825723 \\
 &\quad 212251 \\
 &\quad 4805 \\
 &\quad 195 \\
 &\quad 11
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 t_3 &= 0,0''9036 \ 59632 \ 09479 \ 2085, \\
 \frac{1}{3} t_3 &= 0,0''3012 \ 19877 \ 36493 \ 0695
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 t_3 &= t_1 : 4801^2 \\
 &= 0,0''90365963209 : 23\overline{049601} = 0,0''39 \ 20500 \ 1079 \\
 &\quad 212171602 \\
 &\quad 47251930 \\
 &\quad 11527289 \\
 &\quad 2488 \\
 &\quad 183 \\
 &\quad 22
 \end{aligned}$$

$$t_4 = 0,0''39 \ 20500 \ 1079, \quad \frac{1}{3} t_4 = 0,0''7 \ 84100 \ 0216$$

$$\begin{aligned}
 t_1 &= t_1 : 4801^2 = 0,0''39205001079 : 23\overline{049601} = 0,0''1701 \\
 &\quad 16155 \\
 &\quad 21
 \end{aligned}$$

$$t_1 = 0,0''1701, \quad \frac{1}{3} t_1 = 0,0''243$$

$$\begin{aligned} 0,00020 \ 82899 \ 39595 \ 91751 \ 71839 \ 2001 &= t_1 \\ &3012 \ 19877 \ 36493 \ 0695 = \frac{1}{2} t_1 \\ &7 \ 84100 \ 0216 = \frac{1}{8} t_1 \\ &243 = \frac{1}{7} t_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0,00020 \ 82899 \ 42608 \ 11636 \ 92432 \ 3155 &= p \\ 0,86858 \ 89638 \ 06503 \ 65530 \ 22578 \ 3783 &= 2 M \\ 0,00020 \ 82899 \ 42608 \ 11636 \ 92432 \ 3155 &= p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 17 \ 37177 \ 92761 \ 30073 \ 10604 \ 5157 \\ 69487 \ 11710 \ 45202 \ 92424 \ 1806 \\ 1737 \ 17792 \ 76130 \ 07310 \ 6045 \\ 694 \ 87117 \ 10452 \ 02924 \ 2418 \\ 78 \ 17300 \ 67425 \ 85328 \ 9772 \\ 7 \ 81730 \ 06742 \ 58532 \ 8977 \\ 34743 \ 55855 \ 22601 \ 4621 \\ 1737 \ 17792 \ 76130 \ 0731 \\ 521 \ 15337 \ 82839 \ 0219 \\ 6 \ 94871 \ 17104 \ 5203 \\ 86858 \ 88963 \ 8065 \\ 868 \ 58896 \ 3807 \\ 521 \ 15337 \ 8284 \\ 26 \ 05766 \ 8914 \\ 5 \ 21153 \ 3783 \\ 78173 \ 0067 \\ 1737 \ 1779 \\ 347 \ 4356 \\ 26 \ 0577 \\ 1 \ 7372 \\ 2606 \\ 87 \\ 43 \\ 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0,00018 \ 09183 \ 45421 \ 29991 \ 26204 \ 4693 &= 2 M p \\ 3,38021 \ 12417 \ 11606 \ 02293 \ 62445 \ 8742 &= \log 2400 \\ 3,38039 \ 21600 \ 57027 \ 32284 \ 88650 \ 3435 &= 4 \log 7 \\ 0,84509 \ 80400 \ 14256 \ 83071 \ 22162 \ 5859 &= \log 7 \end{aligned}$$

$\log 7 = 0,84509 \ 80400 \ 14256 \ 83071 \ 22162 \ 5859.$
--

PROBLÈME.

Calculer le logarithme de 11 avec vingt-sept figures.

23. On a

$$\log 100 = \log 99 \\ + 2 M \left[\frac{1}{199} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{199} \right)^2 + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{199} \right)^3 + \dots \right] = \log 99 + 2 M p,$$

ou

$$2 = 2 \log 3 + \log 11 + 2 M p, \quad \log 11 = 2 - 2 \log 3 - 2 M p, \\ 2 - 2 \log 3 = 2 - 2.0,47712 \ 12547 \ 19662 \ 43729 \ 50279 \ 0325 \\ = 2 - \quad 0,95424 \ 25094 \ 39324 \ 87459 \ 00558 \ 0650 \\ = \quad \quad 1,04575 \ 74905 \ 60675 \ 12540 \ 99441 \ 9350$$

$$t_1 = 1 : 199 = 5 : (1000 - 5) \\ = 0,00500 \ 00000 \ 00000 \ 00000 \ 00000 \ 0000$$

$$2 \ 5 \dots$$

$$125.$$

$$6 \dots$$

$$25 \dots$$

$$3125 \dots$$

$$15 \ 625 \dots$$

$$7812 \ 5 \dots$$

$$39 \ 0625 \dots$$

$$19531 \ 25 \dots$$

$$97 \ 65 \ 625$$

$$48 \ 828$$

$$244$$

$$2$$

$$0,00502 \ 51256 \ 28140 \ 70351 \ 75879 \ 39 \ 70 = t_1$$

— 35 —

$$199^2 = 39601$$

$$t_1 = t_1 : 199^2 = t_1 : 39601$$

$$= 0,00502512562814070351758793970 : 39601 = q$$

$$q = 0,0^{\circ}1268 \ 93907 \ 43013 \ 31662 \ 7327$$

$$106502$$

$$273005$$

$$353996$$

$$371882$$

$$154738$$

$$359351$$

$$294240$$

$$170337$$

$$119330$$

$$52735$$

$$131341$$

$$125387$$

$$65845$$

$$262448$$

$$248427$$

$$108219$$

$$29017$$

$$1296$$

$$108$$

$$29$$

$$t_1 = 0,0^{\circ}1268 \ 93907 \ 43013 \ 31662 \ 7327,$$

$$\frac{1}{2} t_1 = 0,0^{\circ}422 \ 97969 \ 14347 \ 77220 \ 9109.$$

$$t_1 = t_1 : 199^2$$

$$= 0,0^{\circ}1268939074301331663 : 39601 = q$$

$$q = 0''3204 \ 31068 \ 48345 \ 5383$$

$$80909$$

$$170707$$

$$123034$$

$$42313$$

$$271201$$

$$335953$$

$$191453$$

$$330401$$

$$136836$$

$$180336$$

$$219323$$

$$21318$$

$$1517$$

$$329$$

$$12$$

$$t_1 = 0,0''3204 \ 31068 \ 48345 \ 5383$$

$$\frac{1}{2} t_1 = 0,0''640 \ 86213 \ 69669 \ 1077$$

$$\begin{aligned}
 t_1 = t_0 : 199 &= 0,0^{11}320 \ 43106848346 : 39601 = q \\
 &3 \ 62306 \ q = 0,0^{10}8091 \ 48931 \ 8034 \\
 &58978 \\
 &193774 \\
 &353708 \\
 &369003 \\
 &125944 \\
 &71416 \\
 &31815 \\
 &134 \\
 &15
 \end{aligned}$$

$$t_1 = 0,0^{10}8091 \ 48931 \ 8034, \ \frac{1}{7} t_1 = 0,0^{11}1155 \ 92704 \ 5433$$

$$\begin{aligned}
 t_0 = t_1 : 199^2 &= 0,0^{10}8091 \ 48932 : 39601 = 0,0^{10}20432 \ 5379 \\
 &171289 \\
 &128853 \\
 &100502 \\
 &21300 \\
 &1499 \\
 &311 \\
 &34
 \end{aligned}$$

$$t_0 = 0,0^{10}20432 \ 5379, \ \frac{1}{5} t_0 = 0,0^{11}2270 \ 2820$$

$$\begin{aligned}
 t_{11} = t_0 : 199^3 &= 0,0^{10}20433 : 39601 = 0,0^{10}5160 \\
 &632 \\
 &236
 \end{aligned}$$

$$t_{11} = 0,0^{10}5160, \ \frac{1}{11} t_{11} = 0,0^{10}469.$$

$$\begin{array}{rcl}
 0,00502 \ 51256 \ 28140 \ 70351 \ 75879 \ 3970 & = & t_1 \\
 \quad 422 \ 97969 \ 14337 \ 77220 \ 9107 & = & \frac{1}{2} t_2 \\
 \quad \quad 640 \ 86213 \ 69669 \ 1079 & = & \frac{1}{4} t_3 \\
 \quad \quad \quad 1155 \ 92704 \ 5433 & = & \frac{1}{8} t_4 \\
 \quad \quad \quad \quad 2270 \ 2820 & = & \frac{1}{16} t_5 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad 469 & = & \frac{1}{32} t_6
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 0,00502 \ 51679 \ 26750 \ 72059 \ 17744 \ 2878 & = & p \\
 0,86858 \ 89638 \ 06503 \ 65530 \ 22578 \ 3783 & = & 2 \ M \\
 0,00502 \ 51679 \ 26750 \ 72059 \ 17744 \ 2878 & = & p
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 0,00434 \ 29448 \ 19032 \ 51827 \ 65112 \ 8919 & & \\
 \quad 1 \ 73717 \ 79276 \ 13007 \ 31060 \ 4516 & & \\
 \quad \quad 43429 \ 44819 \ 03251 \ 82765 \ 1129 & & \\
 \quad \quad \quad 868 \ 58896 \ 38065 \ 03655 \ 3023 & & \\
 \quad \quad \quad \quad 521 \ 15337 \ 82839 \ 02193 \ 1813 & & \\
 \quad \quad \quad \quad \quad 60 \ 80122 \ 74664 \ 55255 \ 8711 & & \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad 7 \ 81730 \ 06742 \ 58532 \ 8977 & & \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 17371 \ 77927 \ 61300 \ 7311 & & \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 5211 \ 53378 \ 38390 \ 2293 & & \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 608 \ 01227 \ 46645 \ 5256 & & \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 43 \ 42944 \ 81903 \ 2518 & & \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 60801 \ 22746 \ 6455 & & \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 1737 \ 17792 \ 7613 & & \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 43 \ 42944 \ 8190 & & \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 7 \ 81730 \ 0674 & & \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 8685 \ 8896 & & \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 6080 \ 1227 & & \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 608 \ 0123 & & \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 34 \ 7435 & & \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 3 \ 4744 & & \\
 \quad 1737 & & \\
 \quad 694 & & \\
 \quad 61 & & \\
 \quad 7 & &
 \end{array}$$

$$0,00436 \ 48054 \ 02450 \ 08465 \ 97442 \ 2222 = 2 \ M p.$$

$$\begin{array}{rcl}
 2 - 2 \log 3 & = & 1,04575 \ 74905 \ 60675 \ 12540 \ 99441 \ 9350 \\
 - 2 \ M p & = & -0,00436 \ 48054 \ 02450 \ 08465 \ 97442 \ 2222
 \end{array}$$

$$2 - 2 \log 3 - 2 \ M p = 1,04139 \ 26851 \ 58225 \ 04075 \ 01999 \ 7128 = \log 11$$

$\log 11 = 1,04139 \ 26851 \ 58225 \ 04075 \ 01999 \ 71$
--

PROBLÈME.

Calculer le logarithme de 13 avec vingt-sept figures.

24. On a

$$\begin{aligned}\log 1001 &= \log 7 \cdot 11 \cdot 13 = \log 1000 \\ &\quad + 2M\left[\frac{1}{1000} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1000}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1000}\right)^3 + \dots\right], \\ \log 13 &= 3 - \log 11 - \log 7 + 2Mp;\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\log 11 &= 1,04139\ 26851\ 58225\ 04075\ 01999\ 7128 \\ \log 7 &= 0,84509\ 80400\ 14256\ 83071\ 22162\ 5859 \\ \log 7 + \log 11 &= 1,88649\ 07251\ 72481\ 87146\ 24162\ 2987 \\ 3 - \log 11 - \log 7 &= 1,11350\ 92748\ 27518\ 12853\ 75837\ 7013 \\ t_1 = 1; 2001 &= 0,00049\ 97501\ 24937\ 53123\ 43828\ 0860 \\ 10000 & \\ 19960 & \\ 19510 & \\ 15010 & \\ 10030 & \\ 2500 & \\ 4990 & \\ 9880 & \\ 18760 & \\ 7510 & \\ 15070 & \\ 10630 & \\ 6250 & \\ 2470 & \\ 4690 & \\ 6880 & \\ 8770 & \\ 7660 & \\ 16570 & \\ 5620 & \\ 16180 & \\ 1720 & \\ 119 & \\ 2001 \cdot 2001 &= 400401.\end{aligned}$$

$$t_3 = t_1 : 2001^2$$

$$= 0.0^249975012493753123438 : 4004001 = q$$

$$q = 0.0^112481268734386710552$$

$$9935002$$

$$19270004$$

$$32540009$$

$$5080013$$

$$10760127$$

$$27521255$$

$$34972493$$

$$29404851$$

$$13768442$$

$$17564393$$

$$15483894$$

$$34718913$$

$$26869058$$

$$2845052$$

$$42251$$

$$2211$$

$$209$$

$$9$$

$$t_3 = 0.0^112481268734386710552,$$

$$\frac{1}{3} t_3 = 0.0^14160422911462236851.$$

$$t_4 = t_3 : 2001^2 = 0.0^112481268734386710552 : 4004001 = q$$

$$4692657 \quad q = 0.0^13117199205092$$

$$6886563$$

$$28825624$$

$$7976173$$

$$39721728$$

$$36857197$$

$$821188$$

$$20388$$

$$368$$

$$8$$

$$t_4 = 0.0^13117199205092, \quad \frac{1}{3} t_4 = 0.0^1623439841018.$$

$$t_5 = t_4 : 2001^2 = 0.0^13117199205092 : 4004001 = 0.0^2778521$$

$$314398$$

$$34118$$

$$2086$$

$$84$$

$$4$$

$$t_5 = 0.0^2778521, \quad \frac{1}{3} t_5 = 0.0^211217.$$

$$\begin{aligned} 0,00049 \ 97501 \ 24937 \ 53123 \ 43828 \ 0860 &= t, \\ 41604 \ 22911 \ 46223 \ 6851 &= \frac{1}{3} t, \\ 623 \ 43984 \ 1018 &= \frac{1}{4} t, \\ 11 \ 1217 &= \frac{1}{5} t, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0,00049 \ 97501 \ 66541 \ 76658 \ 34046 \ 9946 &= p \\ 0,86858 \ 89638 \ 06503 \ 65530 \ 22578 \ 3783 &= 2M \\ 0,00049 \ 97501 \ 66541 \ 76658 \ 34046 \ 9946 &= p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0,00034 \ 74355 \ 85522 \ 60146 \ 21209 \ 0313 \\ 7 \ 81730 \ 06742 \ 58532 \ 89772 \ 0320 \\ 78173 \ 00674 \ 25853 \ 28977 \ 2032 \\ 6080 \ 12274 \ 66455 \ 25587 \ 1158 \\ 434 \ 29448 \ 19032 \ 51827 \ 6511 \\ 86858 \ 89638 \ 06503 \ 6553 \\ 52115 \ 33782 \ 83902 \ 1932 \\ 5211 \ 53378 \ 28390 \ 2193 \\ 434 \ 29448 \ 19032 \ 5183 \\ 34 \ 74335 \ 85522 \ 6014 \\ 86858 \ 89638 \ 0650 \\ 60801 \ 22746 \ 6455 \\ 5211 \ 53378 \ 2839 \\ 521 \ 15337 \ 8284 \\ 43 \ 42944 \ 8190 \\ 6 \ 94871 \ 1710 \\ 26057 \ 6689 \\ 3474 \ 3558 \\ 34 \ 7435 \\ 5 \ 2115 \\ 7117 \\ 781 \\ 34 \\ 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0,00043 \ 40774 \ 79318 \ 64066 \ 89213 \ 8771 &= 2Mp \\ 1,11350 \ 92748 \ 27518 \ 12853 \ 75837 \ 7013 &= 3 - \log 7 - \log 11 \\ 1,11394 \ 33523 \ 06836 \ 76920 \ 65051 \ 5784 &= \log 13 \end{aligned}$$

$\log 13 = 1,11394 \ 33523 \ 06836 \ 76920 \ 65051 \ 58$
--

PROBLÈME.

Calculer le logarithme de $3,1415926536 = z$ avec onze figures.

25. Nous multiplions ce nombre par 3, et il vient

$$3z = 9,4247779608,$$

et c'est de ce multiple que nous cherchons le logarithme.

Posant dans la formule, art. 1, $a = 936$, $x = 6,4777$, il vient

$$\begin{aligned} \log 936 &= \log 3^2 \cdot 2^3 \cdot 13 = 2 \log 3 + 3 \log 2 + \log 13 \\ &= \left\{ \begin{array}{r} 2.0,47712 \quad 12547 \quad 197 \\ 3.0,30102 \quad 99956 \quad 640 \\ 1,11394 \quad 33523 \quad 068 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{r} 0,95424 \quad 25094 \quad 394 \\ 0,90308 \quad 99869 \quad 920 \\ 1,11394 \quad 33523 \quad 068 \end{array} \right\} \\ &\qquad\qquad\qquad \underline{\hspace{1.5cm} 2,97127 \quad 58487 \quad 382} \end{aligned}$$

$$\log 936 = 2,97127 \quad 58487 \quad 382$$

$$\begin{aligned} \log 942,4777 &= \log 936 + 2M \left[\frac{6,4777}{2.936 + 6,4777} + \frac{1}{3} \left(\frac{6,4777}{2.936 + 6,4777} \right)^2 \right] \\ &= \log 936 + 2Mp. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6,4777 : 1878,4222 &= 0,00344 \quad 83773 \quad 750 \\ 84226690 \\ 90875820 \\ 157367120 \\ 7088904 \\ 1453471 \\ 138537 \\ 7044 \\ 1409 \\ 94 \\ 0 \end{aligned}$$

$$\left(\frac{6,4777}{2.936 + 6,4777}\right)^3 = \frac{0,0034483773750^3}{0,003448377} = 0,0'41005$$

$$\begin{array}{r} 1034513 \\ 137935 \\ 13794 \\ 2759 \\ 103 \\ 24 \\ 2 \\ \hline 0,00001189130 \\ 0,00344837738 \\ 0,0000000356739 \\ 47565 \\ 4756 \\ 951 \\ 35 \\ 8 \\ \hline 1 \\ 0,0000000410055 \end{array}$$

$$\frac{1}{3} \left(\frac{6,4777}{2.936 + 6,4777}\right) = \frac{1}{3} \cdot 0,0'410055 = 0,0'136685$$

$$\rho = 0,00344 \begin{array}{l} 83773 \ 750 \\ + 0, \quad 136 \ 685 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} 83773 \ 750 \\ 136 \ 685 \end{array}} \right\} = 0,00344 \ 83910 \ 435$$

$$0,86858 \ 89638 \ 065 = 2 \ M$$

$$0,00344 \ 83910 \ 435 = \rho$$

$$0,00260 \ 57668 \ 914$$

$$34 \ 74355 \ 855$$

$$3 \ 47435 \ 586$$

$$69487 \ 117$$

$$2605 \ 767$$

$$781 \ 730$$

$$8 \ 686$$

$$347$$

$$26$$

$$4$$

$$0,00299 \ 52344 \ 032 = 2 \ M\rho$$

$$2,97127 \ 58487 \ 382 = \log 936$$

$$2,97427 \ 10831 \ 414 = \log 942,4777$$

$$\log 9424777 = 6,97427 \ 10831 \ 4$$

et en faisant de nouveau dans la formule (1) $a = 9424777$

et $x = 0,9608$, il vient

$$\log 9424777,9608 = \log 9424777 + 2 M \frac{0,9608}{2 \cdot 9424777 + 0,9608}$$

$$2 \cdot 9424777 + 0,9608 = 18849554,9608,$$

$$0,9608 : 18849554,9608 = 0,0'509720,$$

$$\begin{array}{r} 183223 \\ 13577 \\ 382 \\ 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 13577 \\ 382 \\ 5 \end{array}$$

$$382$$

$$5$$

$$\frac{0,9608}{2 \cdot 9424777 + 0,9608} = 0,0'509720 = p',$$

$$0,8685889638065 = 2 M$$

$$0,0000000509720 = p'$$

$$0,0000000434294$$

$$7817$$

$$608$$

$$17$$

$$0,0000000442736 = 2 M p'$$

$$6,9742710831414 = \log 9424777$$

$$6,9742711274150 = \log 9424777,9608$$

$$0,4771212547197 = \log 3$$

$$6,4971498726953 = \log 3141592,6536;$$

donc

$$\log 3,1415926536 = 0,49714 \ 98726 \ 95.$$

PROBLÈME.

Trouver le logarithme de **123456789012345678901** = x avec vingt-quatre figures.

26. Nous multiplions ce nombre par 8, et il vient

$$8x = 987654312098765431208,$$

et c'est de ce multiple que nous cherchons le logarithme.

980 étant un des vingt-cinq nombres (page 4) qui ne contiennent que les facteurs 2, 3, 5, 7, 11, 13, nous calcu-

lous d'abord le log de 980. On a

$$\log 980 = \log 10 + 2.7^2 = 1 + \log 2 + 2 \log 7 = \begin{array}{r} 0,311029995663981 \ 19521373889 \\ 1+0,84509804001425683071221626 \\ 0,84509804001425683071221626 \\ \hline 2,99122607569249485663817141 \end{array}$$

$$\log 980 = 2,99122 \ 60756 \ 92494 \ 85663 \ 81714 \ 1$$

Le logarithme de 980 étant trouvé, nous calculons le log de 9876543. Posant, dans la formule, art. 1, $a = 980$, $x = 7,6543$, il vient

$$\begin{aligned} \log 987,6543 &= \log 980 + 2 M \left[\left(\frac{7,6543}{2,980 + 7,6543} + \frac{1}{3} \left(\frac{7,6543}{2,980 + 7,6543} \right)^3 + \dots \right) \right] \\ &= \log 980 + 2 M (t_1 + \frac{1}{3} t_3 + \frac{1}{5} t_5 + \frac{1}{7} t_7 + \dots) = \log 980 + 2 M p. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{7,6543}{2,980 + 7,6543} = \frac{7,6543}{1967,6543} = 0,00389 \ 00634 \ 12053 \ 63757 \ 54246 \ 1 \\ \left(\frac{7,6543}{2,980 + 7,6543} \right)^3 &= \left(\frac{7,6543}{1967,6543} \right)^3 = 0,00001 \ 51325 \ 93349 \ 79834 \ 22025 \ 8 \\ t_3 &= \left(\frac{7,6543}{2,980 + 7,6543} \right)^3 = \left(\frac{7,6543}{1967,6543} \right)^3 = 0,0^{07} \quad 588 \ 66747 \ 71953 \ 66333 \ 9 \\ t_5 &= \left(\dots \dots \dots \right)^5 = \left(\dots \dots \dots \right)^5 = 0,0^{12} \quad 890 \ 80692 \ 17900 \ 6 \\ t_7 &= \left(\dots \dots \dots \right)^7 = \left(\dots \dots \dots \right)^7 = 0,0^{16} \quad 1348 \ 02188 \ 8 \\ t_9 &= \left(\dots \dots \dots \right)^9 = \left(\dots \dots \dots \right)^9 = 0,0^{21} \quad 2039 \ 9 \end{aligned}$$

donc

$$\begin{array}{r} 0,00389 \ 00634 \ 12053 \ 63757 \ 54246 \ 1 = t_1 \\ 0, \quad 196 \ 22249 \ 23984 \ 55444 \ 6 = \frac{1}{3} t_3 \\ \quad 178 \ 16138 \ 43580 \ 1 = \frac{1}{5} t_5 \\ \quad 192 \ 57455 \ 5 = \frac{1}{7} t_7 \\ \quad 291 \ 4 = \frac{1}{9} t_9 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0,00389 \ 00830 \ 34481 \ 03473 \ 11017 \ 7 = p \\ 0,86858 \ 89638 \ 06503 \ 65530 \ 22578 \ 4 = 2 M \\ \hline 0,00337 \ 88831 \ 92041 \ 14138 \ 69980 \ 4 = 2 M p \end{array}$$

$$\log 987,6543 = \log 980 + 2 M p = + \left\{ \begin{array}{l} 2,99122 \ 60756 \ 92494 \ 85663 \ 81714 \ 1 \\ 0,00337 \ 88831 \ 92041 \ 14138 \ 69980 \ 4 \end{array} \right.$$

$$2,99460 \ 49588 \ 84535 \ 99802 \ 51694 \ 5$$

$$\log 9876543 = 6,99460 \ 49588 \ 84535 \ 99802 \ 51694 \ 5.$$

En posant de nouveau dans la formule, art. 1,

$$a = 9876543 \quad \text{et} \quad x = 0,12098765431208,$$

il vient

$$\begin{aligned} & \log 9876543,12098765431208 \\ &= \log 9876543 + 2 M \left(\frac{0,12098765431208}{2,9876543 + 0,12098765431208} \right) \\ & \quad + \frac{1}{3} \left(\frac{0,12098765431208}{2,9876543 + 0,12098765431208} \right)^3 \\ &= \log 9876543 + 2 M (t'_1 + \frac{1}{3} t'_2) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} t'_1 = 0,0^8 \ 61 \ 25000 \ 09218 \ 96764 \ 0 \\ \frac{1}{3} t'_2 = 0,0^{28} \hspace{15em} 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} t'_1 + \frac{1}{3} t'_2 = 0,0^8 \ 61 \ 25000 \ 09218 \ 96764 \ 8 \\ 2 M (t'_1 + \frac{1}{3} t'_2) = 0,0^8 \ 53 \ 20107 \ 48338 \ 97704 \ 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \log 9876543 = 6,99460 \ 49588 \ 84535 \ 99802 \ 51694 \ 5 \\ 2 M (t'_1 + \frac{1}{3} t'_2) = 0, \hspace{10em} 53 \ 20107 \ 48338 \ 97704 \ 1 \end{array}$$

$$\log 9876543,12098765431208 = 6,99460 \ 49642 \ 04643 \ 48141 \ 49398 \ 6$$

donc

$$\begin{array}{r} \log 9876543,12098765431208 = 20,99460 \ 49642 \ 04643 \ 48141 \ 49398 \ 6 \\ \log \hspace{15em} 8 = 0,90308 \ 99869 \ 91943 \ 58564 \ 12166 \ 8 \end{array}$$

$$\log 123456789012345678901 = 20,09151 \ 49772 \ 12699 \ 89577 \ 37231 \ 8$$

$\begin{array}{r} \log 123456789012345678901 \\ = 20,09151 \ 49772 \ 12699 \ 89577 \ 37231 \ 8 \end{array}$



SECONDE PARTIE.

PROBLÈME.

Étant donné un logarithme avec une mantisse de sept chiffres, trouver promptement le nombre correspondant avec sept chiffres sans le secours des Tables.

Solution.

27. Nous avons vu, dans l'art. 4, que lorsqu'un nombre est donné, on peut le multiplier par un des nombres 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, $1\frac{1}{4}$, $1\frac{1}{2}$, $1\frac{2}{3}$, $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2}$, de manière que le premier chiffre à gauche du produit devienne 8 ou 9. Or, si l'on a à chercher le nombre correspondant d'un logarithme qui est plus petit que $\log 8 = 0,9030900$, on peut y ajouter un des logarithmes des nombres $1\frac{1}{4}$, $1\frac{1}{2}$, $1\frac{2}{3}$, 2, $2\frac{1}{2}$, 3, $3\frac{1}{2}$, 4, 5, 6, 7, 8, 9, de manière que la somme devienne plus grande que 0,9030900, ou que le premier chiffre à gauche du nombre correspondant à cette dernière somme, soit ou 8 ou 9.

28. Il en résulte que si le logarithme donné est plus petit que 0,9030900, il faut y ajouter le logarithme d'un des nombres $1\frac{1}{4}$, $1\frac{1}{2}$, $1\frac{2}{3}$, 3, $2\frac{1}{2}$, 3, $3\frac{1}{2}$, 4, 5, 6, 7, 8, 9, pour que la somme devienne plus grande que 0,9030900, chercher le nombre correspondant à cette dernière somme, et l'ayant trouvé, le diviser par le nombre correspondant au logarithme que l'on a ajouté.

29. Donc, il est évident qu'on n'a besoin de s'occuper que des logarithmes dont la mantisse est plus grande que 0,9030900.

30. En toute rigueur, je pourrais me passer des Tables de logarithmes, et trouver à priori toutes les données dont

j'ai besoin; cependant on m'accordera la faculté d'en disposer un moment pour en tirer une certaine conséquence.

31. Les Tables de logarithmes montrent que lorsque les trois premiers chiffres à gauche de la mantisse du logarithme sont :

903, 908, 913, 919, 924, 929, 934, 939, 944, 949, 954, 959, 963, 968, 973, 977, 982, 986, 991, 995, 000 ;
les trois premiers chiffres à gauche du nombre correspondant sont :

800, 810, 820, 830, 840, 850, 860, 870, 880, 890, 900, 910, 920, 930, 940, 950, 960, 970, 980, 990, 100.

De ce tableau résulte, non pas d'une manière rigoureusement mathématique, mais avec une approximation qui nous est plus que suffisante, comme on le verra tout à l'heure, que les trois premiers chiffres à gauche des logarithmes des nombres de 800 à 1000 augmentent de cinq unités lorsque les nombres augmentent de dix unités; c'est-à-dire si l'on désigne par l les trois premiers chiffres à gauche de la mantisse du logarithme donné, l étant plus grand que 903, l'expression

$$800 + 10 \cdot \frac{l - 903}{5} = 800 + 2(l - 903)$$

donne les trois premiers chiffres à gauche du nombre correspondant, mais avec une erreur possible qui ne peut jamais dépasser six unités, ce dont on peut facilement se convaincre en substituant dans l'expression $800 + 2(l - 903)$ pour l successivement les nombres de la première suite 903, 908, 913, etc.; les résultats qu'on obtient ainsi, comparés avec les nombres de la seconde suite 800, 810, 820, etc., correspondants à l , mettront en évidence notre assertion.

32. Or, un logarithme étant donné, on peut déterminer les trois premiers chiffres à gauche du nombre correspondant, avec une approximation telle, que l'erreur ne peut ja-

mais dépasser six unités; or nous avons établi dans la première partie qu'on peut calculer les logarithmes de tous les nombres compris entre 800 et 1 000 en représentant ce nombre par $a + x$, a étant un des vingt-cinq nombres (p. 4), et x plus petit que 15; par conséquent, comme nous savons déterminer le nombre correspondant et compris entre 800 et 1 000 à un logarithme au moins à six unités près, nous trouverons aisément le nombre a , qui, mis dans la formule

$$\log(a + x) = \log a + \frac{2 M x}{2 a + x},$$

donne l'inconnue x .

Ainsi représentons par L le logarithme donné plus grand que 0,903...; on a

$L = \log(a + x)$, et $\log(a + x) - \log a = L - \log a = b$,
et il ne reste qu'à résoudre l'équation

$$b = \frac{2 M x}{2 a + x}$$

pour trouver

$$x = \frac{2 a b}{2 M - b},$$

qui, ajouté à a , donne le nombre correspondant $a + x$.

EXEMPLE.

Soit $\log z = 6,9215655$, trouver le nombre correspondant z .

33. On a

$$\log 8 = 0,903...; \quad 2,9215655 = \log \frac{z}{10000},$$

$$800 + 2(1 - 903) = 800 + 2(921 - 903) = 836.$$

Par conséquent, nous posons $a = 832$, nombre dont nous savons calculer le logarithme (page 4), comme il suit :

$$\begin{aligned} \log 832 &= \log 8.8 \quad 13 = 6, \log 2 + \log 13 \\ &= 6,0,30103000 + 1,11394335 \\ &= 1,80618000 + 1,11394335 \\ &= 2,92012335. \end{aligned}$$

$$\log 832 = 2,92012335,$$

donc

$$\log(a+x) - \log a = b = 2,9215655 - 2,92012335 = 0,00144215,$$

et, par suite,

$$x = \frac{2ab}{2M - b} = \frac{2.832.0,00144125}{0,86858896 - 0,00144215},$$

$$2.832 = 1664, \quad 0,86858896 - 0,00144215 = 0,86714681,$$

$$0,00144215 \cdot 1664 = 2,39974, \quad 2,39974 : 0,86714681 = 2,7674$$

$$\begin{array}{r} 1,44215 \\ 86529 \\ 8653 \\ 577 \\ \hline 2,39974 \end{array} \quad \begin{array}{r} 66545 \\ 5845 \\ 642 \\ 35 \\ 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 86529 \\ 8653 \\ 577 \\ \hline 2,39974 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8653 \\ 577 \\ \hline 2,39974 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 577 \\ \hline 2,39974 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2,39974 \end{array}$$

donc

$$x = 2,7674,$$

et, par suite,

$$a + x = 832 + 2,7674 = 834,7674,$$

ou

$$\frac{z}{10000} = 834,7674, \quad z = 8347674.$$

Le nombre correspondant est 8347674. (Voir page 10.)

EXEMPLE.

Trouver le nombre correspondant au $\log z = 6,2463964$.

34. En ajoutant à ce logarithme le logarithme de 5 (voir art. 28), il vient

$$\log 5z = 6,2463965 + 0,6989700 = 2,9453664;$$

et nous cherchons le nombre correspondant à cette somme de logarithmes.

On a

$$\log 8 = 0,903...; \quad 2,9453664 = \log \frac{5z}{10000},$$

$$800 + 2(1 - 903) = 800 + 2(945 - 903) = 884.$$

4

C'est pourquoi nous posons $a = 880$, dont nous savons calculer ainsi le logarithme.

$$\begin{aligned}\log 880 &= \log 10.8.11 = 1 + 3 \log 2 + \log 11 \\ &= 1 + 3.0,30103000 + 1,04139269 \\ &= 1 + 0,90309000 + 1,04139269 \\ &= 2,94448269 \\ \log 880 &= 2,94448269;\end{aligned}$$

done

$$\log(a+x) - \log a = b = 2,9453664 - 2,9444827 = 0,0008837,$$

et, par suite,

$$x = \frac{2ab}{2M - b} = \frac{2.880.0.0008837}{0.86858896 - 0.008837},$$

$$\begin{array}{r} 2.880 = 1760, \quad 0,868589 - 0,000884 = 0,867705 \\ 0,0008837.1760 = 1,55531, \quad 1,55531 : 0,867705 = 1,7925, \\ \hline \begin{array}{r} 0,8837 \\ 61859 \\ 5302 \\ \hline 1,55531 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 68761 \\ 8022 \\ 213 \\ \hline 40 \end{array} \end{array}$$

done

$$x = 1,7925, \quad a + x = 880 + 1,7925 = 881,7925,$$

ou

$$\frac{5z}{10000} = 881,7925, \quad 5z = 8817925,$$

et, par suite,

$$z = 1763585.$$

Le nombre correspondant est 1763585. (*Voir* page 11.)

EXEMPLE.

Soit $\log z = 6,3760025$, trouver le nombre correspondant z .

33. Nous ajoutons à ce logarithme celui de 4 (*voir* art. 28), et il vient

$$\log 4z = 6,3760025 + 0,6020600 = 6,9780625,$$

et nous cherchons le nombre correspondant à cette somme de logarithmes.

On a

$$\log 8 = 0,903\dots; \quad 2,9780625 = \log \frac{4z}{10000},$$

$$800 + 2(1 - 903) = 800 + 2(978 - 903) = 950;$$

c'est pourquoi nous posons $a = 945$, dont nous cherchons le logarithme.

$$\begin{aligned} \log 945 &= \log 9 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 7 = 3 \log 3 + \log 5 + \log 7 \\ &= 3 \cdot 0,47712125 + 0,69897000 + 0,84509804 \\ &= 1,43136375 + 0,69897000 + 0,84509804 \\ &= 2,9754318, \end{aligned}$$

$$\log 945 = 2,9754318;$$

donc

$$\log(a+x) - \log a = b = 2,9780625 - 2,9754318 = 0,0026307,$$

donc

$$x = \frac{2ab}{2M-b} = \frac{2 \cdot 945 \cdot 0,0026307}{0,86858896 - 0,0026307},$$

$$2 \cdot 945 = 1890, \quad 0,8685889 - 0,002631 = 0,865958,$$

$$0,0026307 \cdot 1890 = 4,972023, \quad 4,972023 : 0,865958 = 5,7416,$$

2,6307	642233
2,10456	36062
236763	1424
4,972023	558
	39

donc

$$x = 5,7416$$

et, par suite,

$$a+x = 945 + 5,7416 = 950,7416,$$

ou

$$\frac{4z}{10000} = 950,7416, \quad 4z = 9507416,$$

4.

et

$$z = 2376854.$$

Le nombre correspondant est 2376854. (Voir page 12.)

EXEMPLE.

Trouver le nombre correspondant au log $z = 6,8744452$.

36. En ajoutant à ce logarithme celui de 11 (*), il vient

$$\log 11z = 6.8744452 + 1,04139268 = 6.91583788,$$

et nous cherchons à cette somme le logarithme.

On a

$$\log 8 = 0,903\dots, \quad 2,91583788 = \log \frac{11z}{10000}$$

$$800 + 2(1 - 903) = 800 + 2(915 - 903) = 924.$$

Nous posons $a = 819$ dont nous cherchons le logarithme.

$$\begin{aligned} \log 819 &= \log 9 \cdot 7 \cdot 13 = 2 \log 3 + \log 7 + \log 13 \\ &= 2.0,47712125 + 0,84509804 + 1,11394335 \\ &= 0,95424250 + 0,84509804 + 1,11394335 \\ &= 2,91328389 \end{aligned}$$

$$\log 819 = 2,91328389;$$

donc

$$\begin{aligned} \log(a + x) - \log a &= b \\ &= 2,91583788 - 2,91328389 = 0,00255399, \end{aligned}$$

donc

$$x = \frac{2ab}{2M - b} = \frac{2 \cdot 819 \cdot 0,00255399}{0,86858896 - 0,00255399},$$

$$2.819 = 1638, \quad 0,86858896 - 0,00255399 = 0,86603497,$$

$$1638.0,00255399 = 4,1834356 : 0,86603497 = 4,83056$$

2,55399	719296
1 532394	26468
766197	487
204319	54
4,1834356	

(*) D'après le § 28, nous aurions dû ajouter le log de $\frac{1}{2}$; nous prenons 11, un des cinq nombres 2, 3, 7, 11, 13 pour abrégier.

donc

$$a + x = 819 + 4,83056 = 823,83056,$$

ou

$$\frac{11z}{10000} = 823,83056, \quad 11z = 82383056$$

et

$$z = 7489369.$$

Le nombre correspondant est 7489369. (Voir page 14.)

Calcul des nombres correspondant à des logarithmes dont la mantisse est de plus de sept chiffres.

37. Remarque importante. Si le logarithme donné ayant une mantisse de plus de sept chiffres, par exemple de neuf chiffres, on demande le nombre correspondant avec plus de sept chiffres, par exemple avec neuf chiffres, on pourrait croire qu'il faut chercher le logarithme de a avec une mantisse de neuf chiffres, retrancher $\log a$ du $\log(a+x)$, logarithme donné, et, pour trouver l'inconnue x , résoudre l'équation du troisième degré :

$$b = 2M \left[\frac{x}{2a+x} + \frac{1}{3} \left(\frac{x}{2a+x} \right)^3 \right];$$

mais il n'en est pas ainsi : on n'a qu'à négliger tout à fait les deux chiffres à droite de la mantisse, et à chercher, d'après la méthode que je viens d'exposer, les sept premiers chiffres du nombre correspondant. Ce nombre de sept chiffres étant trouvé, il suffit, après en avoir supprimé le septième, de calculer son logarithme avec neuf chiffres, et de le retrancher du logarithme donné : on déterminera ainsi d'autres valeurs de a et de b correspondantes qui, mises dans l'équation $x = \frac{2ab}{2M - b}$, feront trouver l'inconnue x .

Pour mettre en évidence ce que nous venons de dire, nous nous proposons de résoudre les deux problèmes suivants.

PREMIER PROBLÈME.

Soit $\log x = 0,4971498726951$, trouver le nombre correspondant x avec onze chiffres.

38. En ajoutant à ce logarithme celui du nombre 3, il vient

$$\begin{aligned}\log 3x &= 0,4971498726951 + 0,4771212547197 \\ &= 0,9742711274148;\end{aligned}$$

nous cherchons le nombre correspondant à cette somme de logarithmes.

On a

$$\log 8 = 0,903\dots, 800 + 2(1 - 903) = 800 + 2(974 - 903) = 942.$$

C'est pourquoi nous posons $a = 936$, dont nous calculons le logarithme.

$$\begin{aligned}\log 936 &= \log 9 \cdot 8 \cdot 13 = 2 \log 3 + 3 \log 2 + \log 13 \\ &= 2,0,47712125 + 3,0,31103000 + 1,11394335 \\ &= 0,9542425 + 0,9030900 + 1,1139434 = 2,9712759,\end{aligned}$$

$$\log 936 = 2,9712759;$$

donc

$$\log(a+x) - \log a = b = 2,9742711 - 2,9712759 = 0,0029952,$$

et, par suite,

$$x = \frac{2ab}{2M-b} = \frac{2 \cdot 936 \cdot 0,0029952}{0,8685890 - 0,0029952},$$

$$2 \cdot 936 = 1872, \quad 0,8685890 - 0,0029952 = 0,8655938$$

$$1872 \cdot 0,002995 = 5,607014, \quad 5,607014 : 0,8655938 = 6,4776$$

2,9952	41345
2,39616	6721
209664	662
5990	56
5,607014	

donc

$$a + x = 936 + 6,4776 = 942,4776.$$

Les six premiers chiffres du nombre correspondant sont 942477, c'est pourquoi nous calculons le logarithme de 942,477 avec onze figures, en posant

$$\begin{aligned} \log 942,477 &= \log 936 \\ &+ 2 M \left[\frac{6,477}{2.936 + 6,477} + \frac{1}{3} \left(\frac{6,477}{2.936 + 6,477} \right)^3 \right], \\ 2.936 + 6,477 &= 1878,477, \\ 6,477 : 1878477 &= 0,003448006018 \\ 8415690 \\ 9017820 \\ 15039120 \\ 11304 \\ 33 \\ 14 \\ 0,003448006 & \quad 0,00001188874 \\ 0,003448006.. & \quad 0,003448006... \\ \hline 0,00001034402 & \quad 0,000000356662 \\ 137920 & \quad 47555 \\ 13792 & \quad 4755 \\ 2758 & \quad 951 \\ 2 & \quad 1 \\ \hline 0,00001188874 & \quad 0,000000409924 : 3 = 0,0'136641, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \left(\frac{6,477}{2.936 + 6,477} \right)^3 &= 0,0'136641, \\ 2 M \left[\frac{6,477}{2.936 + 6,477} + \frac{1}{3} \left(\frac{6,477}{2.936 + 6,477} \right)^3 \right] \\ &= 2 M (0,003448006018 + 0,0'136641) \\ &= 2 M (0,003448019682) \\ &= 0,8685889638065.0,003448019682 \\ &= 0,0029949118425, \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r}
 0,8685889638065 \\
 0,003448019682 \\
 \hline
 0,0026057668914 \\
 3474355855 \\
 347435585 \\
 69487117 \\
 86859 \\
 78173 \\
 5211 \\
 694 \\
 17 \\
 \hline
 0,0029949118425
 \end{array}$$

$$\log 942,477 = \left\{ \begin{array}{l} 2,9712758487382 \\ 0,0029949118425 \end{array} \right\} = 2,9742707605807;$$

donc

$$\begin{aligned}
 \log(a' + x') - \log a' &= \log 3x - \log 942,477 \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} 2,9742711274148 \\ -2,9742707605807 \end{array} \right\} = 0,003668341 = b',
 \end{aligned}$$

donc

$$x' = \frac{2 a' b'}{2 M - b'} = \frac{2.942477.0,003668341}{0,8685889638065 - 0,003668341},$$

$$2,942477 = 1884954, \quad 1884954.0,003668341 = 0,6914651$$

$$\begin{array}{r}
 0,5654862 \\
 1130972 \\
 113097 \\
 15078 \\
 565 \\
 75 \\
 2 \\
 \hline
 0,6914651
 \end{array}$$

$$0,8685889638065 - 0,003668341 = 0,868588969724.$$

$$0,6914651 : 0,8685886 = 0,79608,$$

$$834531$$

$$52801$$

$$686$$

donc

$$3z = 9,4247779608,$$

et, par suite,

$$z = 3,1415926536.$$

Le nombre correspondant est 3,1415926536. (*Voir* p. 43.)

DEUXIÈME PROBLÈME.

Log 1 = 20,09151 49772 12699 89577 27231 8, trouver x.

39. En ajoutant à ce logarithme le log de 8, il vient

$$\log 8z = 20,99460 49642 04643 48141 49398 6.$$

Nous nous occupons d'abord de la recherche de sept premiers chiffres du nombre correspondant à cette somme de logarithmes, et pour cela il nous suffit de prendre les sept premiers chiffres à gauche 0,9946050. On a

$$\log 8 = 0,903\dots, 800 + 2(1 - 903) = 800 + (994 - 903) = 982.$$

En posant $a = 980$, on a

$$\log 980 = \log 2 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 10 = 2,9912261,$$

$$b = 2,9446050 - 2,9912261 = 0,0033789,$$

$$= \frac{2ab}{2M - b} = \frac{2 \cdot 980 \cdot 0,0033789}{2 \cdot 0,43429448 - 0,0033789} = \frac{6,622644}{0,86521} = 7,6543.$$

Donc les sept chiffres à gauche du nombre correspondant sont 9876543, et si l'on cherche son logarithme avec vingt-quatre figures, il vient

$$\log 9876543 = 6,99460 49588 84535 99802 51694 5. (\text{V. p. 45.})$$

En posant de nouveau $a' = 9876543$, il vient

$$\begin{aligned} b' &= 0,0^{\circ}53\ 20107\ 48338\ 97704, \\ 2\ a'\ b' &= 0,10508\ 85406\ 48641\ 70642\ 89852\ 6, \\ 2\ M - b' &= 0,86858\ 89584\ 86396\ 17192, \dots, \end{aligned}$$

et, par suite,

$$\begin{aligned} x' &= \frac{2\ a'\ b'}{2\ M - b'} = \frac{0,1050885406486417064}{0,868588958486396172}, \\ &= 0,1209876543120800, \end{aligned}$$

donc

$$8\ z = 987654312098765431208,00.$$

Ce résultat est juste, parce que $\frac{1}{3} \left(\frac{x'}{2\ a' + x'} \right)^3$ n'a aucune influence sur les vingt-quatre figures à gauche du nombre, car $\frac{x}{2\ a' + x}$ doit être plus petit que

$$\frac{1}{2 \cdot 9876543 + 1} = \frac{1}{19753087}.$$

On trouve ainsi

$$z = 12345\ 67890\ 12345\ 67890\ 1,00. \quad (\text{Voir page 45.})$$



40. Pour la commodité des lecteurs, nous donnons la Table suivante :

$2M$	$=$	0,86858	89638	06503	65530	22578	38
log $1\frac{1}{2}$	$=$	0,09691	00130	08056	41435	87833	16
log $1\frac{1}{2}$	$=$	0,17609	12590	55681	24208	12890	09
log $1\frac{1}{2}$	$=$	0,22184	87496	16356	40749	12332	02
log 2	$=$	0,30102	99956	63981	19521	37388	95
log $2\frac{1}{2}$	$=$	0,39794	00086	72037	60957	25222	11
log 3	$=$	0,47712	12547	19662	43729	50279	03
log $3\frac{1}{2}$	$=$	0,54406	80443	50275	63549	84773	64
log 4	$=$	0,60205	99913	27962	39042	74777	89
log 5	$=$	0,69897	00043	36018	80478	62611	05
log 6	$=$	0,77815	12503	83643	63250	87667	98
log 7	$=$	0,84509	80400	14256	83071	22162	59
log 8	$=$	0,90308	99869	91943	58564	12166	84
log 9	$=$	0,95424	25094	39324	87459	00558	07
log 11	$=$	1,04139	26851	58225	04075	01999	71
log 13	$=$	1,11394	33523	06836	76920	65051	58
log 810	$=$	2,90848	50188	78649	74918	01116	13
log 819	$=$	2,91328	39017	60418	47450	87772	23
log 825	$=$	2,91645	39485	49925	08761	77500	85
log 832	$=$	2,92012	33262	90723	94048	89385	26
log 840	$=$	2,92427	92860	61881	65843	47219	51
log 845	$=$	2,92685	67089	49692	34319	92714	21
log 858	$=$	2,93348	72878	48705	44246	54719	27
log 864	$=$	2,93651	37424	78893	28795	37781	82
log 875	$=$	2,94200	80530	22313	24507	09995	73
log 880	$=$	2,94448	26721	50168	62639	14166	55
log 891	$=$	2,94987	77040	36874	78993	03115	84
log 896	$=$	2,95230	80096	62125	19720	83885	22
log 910	$=$	2,95904	13923	21093	59991	87214	17
log 924	$=$	2,96567	19712	20106	69918	49219	22
log 936	$=$	2,97127	58487	38105	22943	77776	49
log 945	$=$	2,97543	18085	09262	94738	35610	73
log 960	$=$	2,98227	12330	39568	41336	37223	77
log 968	$=$	2,98587	53573	08393	66714	16166	27
log 972	$=$	2,98766	62649	26274	57690	26173	06
log 975	$=$	2,98900	46156	98536	81607	40552	72
log 980	$=$	2,99122	60756	92494	85663	81714	12
log 990	$=$	2,99563	51945	97549	91534	02557	78

678938



